

Propositiot:

- Propositiot ovat väitelauseita. Totuusfunktiot antavat niille totuusarvon **T** tai **E**.
- Perusaksioomat:

Laki 1: Kukin totuusfunktio antaa kullekin propositiolle totuusarvoksi joko toden **T** tai epätoden **E** (law of excluded middle).

Laki 2: Yksittäinen totuusfunktio ei voi antaa samalle propositiolle totuusarvoksi sekä toden **T** että epätoden **E** (law of contradiction).

Laki 3: Kaikki totuusfunktiot muodostavat yhdistetyn proposition totuusarvon samalla tavalla proposition yksittäisten osien totuusarvojen pohjalta (the law of truth functionality).

- Aakkosto $\{P, Q, R, \dots, P_1, Q_1, \dots, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$ ja kielioppisääntö

$$\begin{aligned} \text{lauseke} &= \text{peruspropositio} \mid \text{"}\neg\text{"}, \text{lauseke} \\ &\mid \text{"}\text{(}\text{, lauseke, "}\wedge\text{"}, \text{lauseke, "}\text{)}\text{"} \\ &\mid \text{"}\text{(}\text{, lauseke, "}\vee\text{"}, \text{lauseke, "}\text{)}\text{"} \\ &\mid \text{"}\text{(}\text{, lauseke, "}\Rightarrow\text{"}, \text{lauseke, "}\text{)}\text{"} \\ &\mid \text{"}\text{(}\text{, lauseke, "}\Leftrightarrow\text{"}, \text{lauseke, "}\text{)}\text{"} \\ \text{peruspropositio} &= \text{"}P\text{"} \mid \text{"}Q\text{"} \mid \text{"}R\text{"} \mid \dots \mid \text{"}P_1\text{"} \mid \text{"}Q_1\text{"} \mid \text{"}R_1\text{"} \mid \dots \end{aligned}$$

- Loogiset operaattorit eli *konnektiivit*:

- \wedge *konjunktio* eli “ja”
- \vee *disjunktio* eli “tai”
- \Rightarrow *implikaatio* eli “jos ..., niin ...”
- \Leftrightarrow *ekvivalenssi* eli “jos ja vain jos” eli “ $\Rightarrow \wedge \Leftarrow$ ”
- \neg *negaatio* eli “ei”

- Perustotuustaulu kuvaa totuusfunttioiden käyttäytymistä yhdistettyjen propositionien tapauksessa (vrt. laki 3):

<i>A</i>	<i>B</i>	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
T	T	E	T	T	T	T
T	E	E	E	T	E	E
E	T	T	E	T	T	E
E	E	T	E	E	T	T

Esimerkki I:

aluksi: $k = 0$, $\varepsilon > 0$, $0 \leq itmax < \infty$ ja u^0 on annettu

$$r = Au^k - f$$

while ($|r| > \varepsilon$) \wedge ($k < itmax$) **do**

$u^k \rightarrow u^{k+1}$ (päivitysalgoritmin soveltaminen)

$$r = Au^{k+1} - f$$

$$k \leftarrow k + 1$$

od

Tulkinta:

- annetaan totuusarvot **T** tai **E** yksittäisille propositioille
- arvioidaan lausekkeen totuusarvo totuustaulun avulla

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg C$	$((A \wedge B) \vee \neg C)$	$((A \wedge B) \vee \neg C) \Leftrightarrow A$
T	T	T	T	E	T	T
T	T	E	T	T	T	T
T	E	T	E	E	E	E
T	E	E	E	T	T	T
E	T	T	E	E	E	T
E	T	E	E	T	T	E
E	E	T	E	E	E	T
E	E	E	E	T	T	E

Totuustaulun koko (induktio vrs. rekursio)

Jos aakkosto koostuu n :stä alkeismerkistä, on kaikkien k :n mittaisten merkkijonojen yhteismäärä n^k . Induktiotodistus:

1^o Jos $k = 1$ on erilaisia mahdollisuuksia tasan $n = n^1$ kappaletta.

2^o *Induktio-oletus*: k :n mittaisia merkkijonoja on n^k kappaletta.

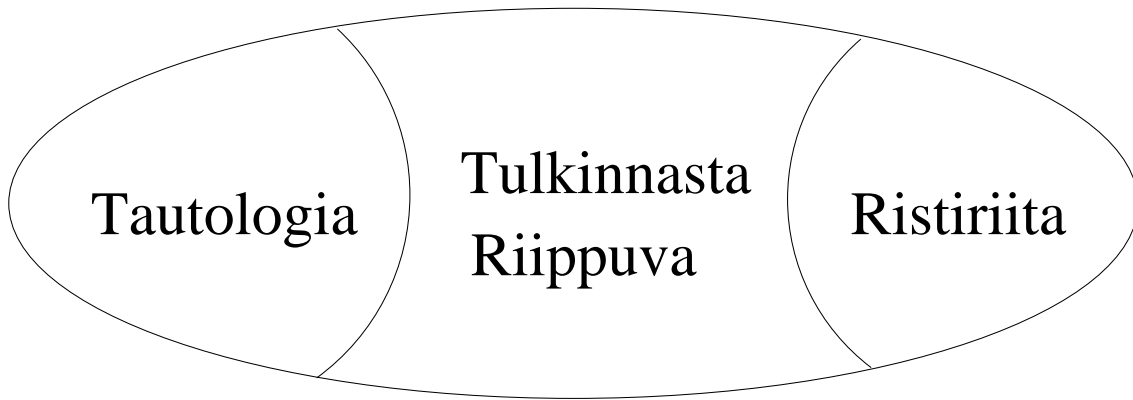
3^o *Induktioaskel*: Liittämällä jokaisen n :n alkeismerkin perään rekursiivisesti *kaikki* n^k k :n mittaista merkkijonoa saadaan $n \cdot n^k = n^{k+1}$ kappaletta $k + 1$:n mittaisia merkkijonoja. (Vertaa yo totuustaulu=

Lausekkeiden luokittelu:

1. *Tautologia* (tautology, valid proposition) on propositio, joka on totta kaikissa mahdollisissa, esim. $A \vee \neg A$.
2. *Ristiriita* (contradiction) on propositio, joka ei ole totta missään mallissa, esim. $A \wedge \neg A$.
3. *Kontingentti* (contingent) propositio on totta ainakin yhdessä mutta ei kaikissa mahdollisissa, esim. $A \vee B$. Huomaa, että propositio on kontingentti jos ja vain jos se ei ole tautologia eikä ristiriita.
4. *Konsistentit* (consistent) eli toteutuvat (satisfiable) propositiot ovat totta ainakin yhdessä mallissa, joten niiden joukko muodostuu tautologioiden ja kontingenttien propositioiden joukkojen yhdisteestä.
5. *Kumoutuvat* (refutable) propositiot ovat epätosia ainakin yhdessä mallissa, joten niiden joukko muodostuu ristiriitojen ja kontingenttien propositioiden joukkojen yhdisteestä.

Luokkien suhteista...

Jos P on ...	niin $\neg P$ on ...	Jos P on ...	niin P ei ole...
tautologia	ristiriita	tautologia	kumoutuva
ristiriita	tautologia	ristiriita	konsistentti
kontingentti	kontingentti	konsistentti	ristiriita
konsistentti	kumoutuva	kumoutuva	tautologia
kumoutuva	konsistentti		



Semanttinen seuraus:

- Olkoon olemassa joukko lausekkeita (premissiä) \mathcal{P}
- Lauseke \mathcal{W} on \mathcal{P} :n *semanttinen seuraus*, jos \mathcal{W} on totta kaikissa niissä malleissa joissa kaikki lausekkeet joukossa \mathcal{P} ovat totta.
- Merkintä $\mathcal{P} \models \mathcal{W}$

Esimerkki: $P, P \Rightarrow Q \models Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	E	E
E	T	T
E	E	T

“Jos P on totta ja jos P :stä seuraa Q on totta, niin Q :kin on totta”.

Esimerkki I: (if..., while...)

Jos $(|r| > \varepsilon) \wedge (k < itmax)$, niin silmukka suoritetaan, jolloin u^k , r ja k päivittyvät.

Ekvivalenttius:

- Merkintä $A \equiv B \simeq \models A \Leftrightarrow B$
- “ A on totta jos ja vain jos B on totta kaikissa malleissa”
- uudelleenkirjoitussäännöt päättelyn yhteydessä

Esimerkki: $(P \Rightarrow Q) \equiv \neg (P \wedge \neg Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg (P \wedge \neg Q)$
T	T	T	E	E	T
T	E	E	T	T	E
E	T	T	E	E	T
E	E	T	E	E	T

Propositiolaskennan päättelysääntöjä 1:

Formaatti: $\frac{\mathcal{P}(\{\text{premissit}\})}{\mathcal{W}(\{\text{seuraukset}\})}$,

\wedge -esittely: $\frac{A, B}{A \wedge B}$ sekä $\frac{A, B}{B \wedge A}$,

\wedge -poisto: $\frac{A \wedge B}{A}$ sekä $\frac{A \wedge B}{B}$,

\vee -esittely: $\frac{A}{A \vee B}$ sekä $\frac{A}{B \vee A}$,

\neg -poisto: $\frac{\neg \neg A}{A}$

\Rightarrow -poisto: $\frac{A, A \Rightarrow B}{B}$,

\Leftrightarrow -poisto: $\frac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B}$ sekä $\frac{A \Leftrightarrow B}{B \Rightarrow A}$,

\Leftrightarrow -esittely: $\frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}$.

Todistus/johtamisstrategioita 1:

suora johtaminen:

- $P \wedge Q \vdash P \vee Q$
- $P, Q, P \wedge Q \Rightarrow R \vdash R$
- $P, P \Rightarrow Q, Q \Leftrightarrow R \vdash Q \wedge R$
- $P \wedge Q, P \Rightarrow S, Q \Rightarrow T \vdash S \wedge T$

Premissien täydennys: $P \Rightarrow R$:n todistuksessa P :n voi ottaa premissiksi, koska $P \Rightarrow R$ on aina **T** kun P on **E**

Vaihtoehtojen läpikäynti: $P \Rightarrow R$:n todistuksessa P :n sisältämät \vee -osat pitää käydä läpi erikseen

Propositiolaskennan päättelysääntöjä 2:

Formaatti: sisältököön S kaikki annetut oletukset ja premissit sekä todistuksessa/johdossa jo esiintyneet välitulokset eli kaiken sen, joka kyseisessä vaiheessa on totta

$$\vee\text{-poisto: } \frac{S, A \vdash C, S, B \vdash C, A \vee B}{C}$$

$$\Rightarrow\text{-esittely: } \frac{S, A \vdash B}{A \Rightarrow B}$$

$$\neg\text{-esittely: } \frac{S, A \vdash B, S, A \vdash \neg B}{\neg A}$$

Todistus/johtamisstrategioita 2:

epäsuora johtaminen: $A \vdash B$:llä eli $\vdash A \Rightarrow B$:llä ja $\vdash \neg B \Rightarrow \neg A$:lla samat tulkinnat

- $P \Rightarrow Q \vdash \neg (P \wedge \neg Q)$

HUOM: Jos annetut premissit ristiriidassa, mikä tahansa väite totta!!!

- $P, \neg P \vdash Q$

Lemmat: Tosien lauseiden joukon täydentäminen aputuloksilla
Oletetaan, että lemma

$$\neg P \Rightarrow \neg Q \vdash P \Rightarrow Q$$

pitää paikkansa. Näytä, että $\neg P \Rightarrow \neg Q, P \Rightarrow \neg R, R \vdash \neg (R \wedge Q)$.

Propositiolaskennan päättelysääntöjä 3:

idempotenssi: (i) $P \wedge P \dashv\vdash P$, (ii) $P \vee P \dashv\vdash P$,

kommutatiivisuus: (i) $P \wedge Q \dashv\vdash Q \wedge P$, (ii) $P \vee Q \dashv\vdash Q \vee P$,

assosiatiivisuus: (i) $(P \wedge Q) \wedge R \dashv\vdash P \wedge (Q \wedge R)$,
(ii) $(P \vee Q) \vee R \dashv\vdash P \vee (Q \vee R)$,

jakautuminen: (i) $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,
(ii) $P \vee (Q \wedge R) \dashv\vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$,

de Morgan: (i) $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$, (ii) $\neg(P \vee Q) \dashv\vdash \neg P \wedge \neg Q$,

negaatiolakeja: (i) $\neg(P \Rightarrow Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$,
(ii) $\neg(P \Leftrightarrow Q) \dashv\vdash \neg P \Leftrightarrow Q \dashv\vdash P \Leftrightarrow \neg Q$,

Propositiolaskenta formaalina systeeminä:

täydellisyys: Jos \mathcal{P} on joukko lauseita, on formaali systeemi (tulkintansa mukaan) täydellinen, jos semanttinen seuraus $\mathcal{P} \models \mathcal{W}$ implikoi syntaktisen seurauksen $\mathcal{P} \vdash \mathcal{W}$.

johdonmukaisuus: Jos \mathcal{P} on joukko lauseita, on formaali systeemi (tulkintansa mukaan) johdonmukainen, jos syntaktinen seuraus $\mathcal{P} \vdash \mathcal{W}$ implikoi semanttisen seurauksen $\mathcal{P} \models \mathcal{W}$.

PROPOSITIOLASKENTA:

Propositio: väittämiä, joihin liitetään totuusarvo **T** tai **E**

Propositiologiikka: propositioiden muodostama aakkosto sekä niitä yhdistävät konnektiivit, joiden avulla aakkostosta voidaan muodostaa uusia propositioita

Terminologiaa:

lausekkeiden luokittelu: tautologia (aina **T**), ristiriita (aina **E**), kontingentti (molempia **T** tai **E**), konsistentti (ainakin kerran **T**)

semanttinen seuraus: $A \models B$ tarkoittaa, että B tulkitaan todeksi **T** aina kun A on tosi

ekvivalenttius: $A \equiv B$ tarkoittaa, että A :lla ja B :llä on täsmälleen sama tulkinta (eli totuustaulu)

Propositiolaskentaa:

luonnollinen päättelymekanismi: konnektiivien esittelyn ja poiston määrittävät päättelysäännöt

suora johtaminen: oletuksista ja premisseistä haluttuun lopputulokseen

epäsuora johtaminen: vastaväitteistä ristiriitaan oletuksien tai premissien kanssa

tunnettuja tuloksia: propositiolaskennassa päteviä perustuloksia

Johdonmukaisuus ja täydellisyys: propositiolaskennan formaalille systeemille $\mathcal{P} \models \mathcal{W}$ ja $\mathcal{P} \vdash \mathcal{W}$ tarkoittavat samaa asiaa