Topologia
Harjoitus 7, 28.10.2009

1. Olkoon E täydellinen normiavaruus ja $f : E \to E$ kontraktio. Osoita, että kaava

$$F(x) = x + f(x)$$

määrittelee bilipchitz-homeomorfismin $F : E \to E$.

2. Olkoon $A \subset X$. Näytä, että A on kompakti <u>joss</u> jokaisella A:n peitteellä joka koostuu X:n avoimista joukoista on äärellinen osapeite, joka peittää A:n.

3. Osoita, että X on kompakti <u>joss</u> sillä on *äärellisten leikkausten ominaisuus*: jos joukot F_α, $\alpha \in I$ ovat suljettuja joukkoja siten, että

$$\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \neq \emptyset \text{ kaikilla äärellisillä } J \subset I\,, \qquad \text{niin} \qquad \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset\,.$$

4. Todista suoraan kompaktiuden määritelmän (peiteominaisuus) avulla: *Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

5. Näytä, että jonokompaktien avaruuksien X ja Y karteesinen tulo $X \times Y$ on jonokompakti.

6. Onko suljettu yksikköpallo $\bar{B}(0,1)$ kompakti ℓ^2:ssa?

7. Osoita, että kompakti metrinen avaruus on *separoituva*, ts. sillä on numeroituva, tiheä osajoukko.

8. Olkoot $A, B \subset X$ epätyhjiä, erillisiä. Jos A on kompakti ja B suljettu, niin näytä, että $d(A,B) > 0$. Osoita esimerkillä, ettei etäisyyttä aina saavuteta (ts. voi olla: $d(a,b) > d(A,B)$ kaikilla $a \in A$, $b \in B$), mutta saavutetaan, mikäli $X = \mathbf{R}^n$.

9. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ avoin. Näytä, että on olemassa nouseva jono avoimia joukkoja $G_1 \subset\subset G_2 \subset\subset G_3 \subset\subset \dots$ siten, että

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{G_j} = \Omega\,.$$

10. Näytä, että metrinen avaruus on kompakti täsmälleen silloin, kun se on prekompakti ja täydellinen.

---

[1]Vihje: Kun $y \in E$, niin osoita, että kuvauksella $g_y(x) = y - f(x)$ on täsmällen yksi kiintopiste $G(y)$. Näytä, että näin saatu kuvaus $y \mapsto G(y)$ on F:n käänteiskuvaus.

[6]Muista: ℓ^2 on normiavaruus, joka koostuu kaikista lukujonoista $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $x_j \in \mathbf{R}$, joille $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$, normina on

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2}\,.$$

[9]Merkintä $A \subset\subset B$ tarkoittaa, että $\bar{A}$ on B:n kompakti osajoukko. Vihje: $\{d(x, \complement\Omega) < 1/j\}$.

[10]Avaruus on *prekompakti* jos se voidaan, oli $\varepsilon > 0$ mikä hyvänsä, peittää äärellisen monella avoimella joukolla, joiden halkaisijat ovat $< \varepsilon$.