RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Harjoitus 7, 12.5.2014

1. Osoita, että ∂A on suljettu joukko.

2. Osoita, että

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}.$$

3. Osoita:

$$\bar{A} = A \cup \{A\text{:n kasaantumispisteet}\}.$$

4. Näytä, että joukko A on avoin jos ja vain jos se on yhdiste avoimia välejä.

5. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ja $r > 0$. Osoita, että joukon A *r-pullistuma*

$$A + B(r) = \bigcup_{x \in A}]x - r, x + r[$$

on avoin joukko ja $\bar{A} \subset A + B(r)$.

6. Näytä, että jokainen joukko A on tiheä sulkeumassaan $\bar{A}$, ts. jokaiselle avoimelle joukolle B ehdosta $B \cap \bar{A} \neq \emptyset$ seuraa, että

$$B \cap A \neq \emptyset.$$

7. Olkoon A avoin ja F suljettu. Osoita, että $A \setminus F$ on avoin ja $F \setminus A$ on suljettu.

8. Osoita, että $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$.

9. Onko

$$\operatorname{int}(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \operatorname{int}(A_j) \quad \text{tai} \quad \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{A}_j\,?$$

10. (Palauta kirjallisena) Todista: $\operatorname{int}(\partial A) = \emptyset$, jos A on suljettu tai avoin joukko. Anna esimerkki joukosta $B \subset \mathbf{R}$, jolle $\operatorname{int}(\partial B) \neq \emptyset$. (Huolelliset perustelut)

11. (Pohdittavaksi; ei käsiteltäne harjoituksissa)

a) Anna esimerkki avoimista väleistä I_j, joille

$$\partial(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j) \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} \partial I_j = \emptyset.$$

b) Jos $\overline{\{x_1, x_2, x_3, \dots\}} = [0,1]$ niin voiko olla avointa joukkoa $A \subset \mathbf{R}$, jolle

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset A \quad \text{ja} \quad]0,1[\setminus A \neq \emptyset\,?$$

[10]Kirjallisena palautetuista tehtävistä voi saada 0-2 pistettä bonuksena kevään 2014 loppukokeeseen.

RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Laskuryhmä 7, 8.5.2014

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Olkoot $a \in A$ ja $b \notin A$, $a < b$. Osoita, että on olemassa $c \in \partial A$, jolle $a \leq c \leq b$.

22. Olkoon
$$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup [1, 2].$$
Määrää ∂A ja joukon A kasaantumispisteiden joukko.

23. Osoita: Piste x_0 on joukon A kasaantumispiste jos ja vain jos on olemassa jono $x_n \in A$, jolle $x_n \neq x_0$ kaikilla n ja $x_n \to x_0$.

24. Olkoon $x_0 \notin A$. Osoita, että $x_0 \in \partial A$ jos ja vain jos on olemassa jono $x_n \in A$, jolle $x_n \to x_0$.