RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Harjoitus 6, 5.5.2014

1. Olkoon $A = [-1, 3[\setminus \mathbf{N}$. Määrää (huolellisesti perustellen) joukot $\operatorname{int} A$ ja ∂A.

2. Olkoon K suljettu joukko ja $x_n \in K$. Jos $x_n \to x_0$, niin osoita, että $x_0 \in K$.

3. Olkoon A ylhäältä rajoitettu. Osoita, että $\sup A \in \partial A$.

4. Osoita, että $\partial(\partial A) \subset \partial A$. Näytä esimerkillä, että inkluusio voi olla aito.

5. Näytä, että $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$ ja $\partial A^c = \partial A$.

6. Osoita, että $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Näytä esimerkillä, että inkluusio voi olla aito.

7. Onko $\partial(\operatorname{int} A) = \partial(\operatorname{ext} A)$?

Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ epätyhjä joukko ja $x_0 \in \mathbf{R}$. *Pisteen* x_0 etäisyys joukosta A on luku

$$\operatorname{dist}(x_0, A) := \inf\{|y - x_0| : \, y \in A\}.$$

8. Olkoon $A \neq \emptyset$. Osoita:
a) Jos $x_0 \in A$, niin $\operatorname{dist}(x_0, A) = 0$.
b) Jos $x_0 \in \partial A$, niin $\operatorname{dist}(x_0, A) = 0$.
c) $x_0 \in \operatorname{ext} A$ jos ja vain jos $\operatorname{dist}(x_0, A) > 0$.

9. Olkoon $A \neq \emptyset$ ja $\delta > 0$. Näytä, että joukko

$$E = \{x \in \mathbf{R} : \operatorname{dist}(x_0, A) > \delta\}$$

on avoin.

10. (Palauta kirjallisena) Olkoon $x_n \in [0, 1]$ vähenevä jono lukuja, jolle $x_n \to x_0$. Olkoon

$$A = \{x \in [-2, 2[: x \neq x_n \text{ kaikilla } n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Määrää joukot $\operatorname{int} A$, ∂A ja $\operatorname{ext} A$.

[10]Kirjallisena palautetuista tehtävistä voi saada 0-2 pistettä bonuksena kevään 2014 loppukokeeseen.