RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Harjoitus 5, 28.4.2014

1. Olkoon $a < b$. Osoita, että on olemassa sellaiset suljetut välit $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots,$ että

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] =]a, b[\,.$$

2. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$, $A_0 \subset A$ ja $B_0 \subset \mathbf{R}$. Näytä, että

$$A_0 \subset f^{-1}(f(A_0)) \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0\,.$$

Millä ehdoilla yhtäsuuruudet ovat voimassa?

3. Osoita että kaikilla $A_1, A_2 \subset A$

$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2).$$

Näytä, ettei yhtäsuuruus ole aina tosi. Millä ehdolla "=" pätee?

4. Olkoon $x_0 \in]a, b[$. Näytä, että on olemassa $r > 0$, jolle $]x_0 - r, x_0 + r[\subset]a, b[$.

5. Näytä, ettei tehtävän 4 ominaisuus ole enää tosi, jos avoin väli $]a, b[$ korvataan suljetulla välillä $[a, b]$. Muotoile ja todista.

6. Olkoon $x_0 \in]0, 2[\setminus \{\frac{1}{2}, 1, \frac{4}{3}\}$. Näytä, että on olemassa $r > 0$, jolle

$$[x_0 - r, x_0 + r] \subset]0, 2[\setminus \{\frac{1}{2}, 1, \frac{4}{3}\}.$$

7. Olkoot I_n, $n = 1, 2, \ldots,$ avoimia välejä ja

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\,.$$

Osoita, että on olemassa $r > 0$, jolle

$$[x_0 - r, x_0 + r[\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n[\,.$$

8. (Palauta kirjallisena)[8]

a) Osoita, että $A \subset B$ jos ja vain jos $A \cap B = A$.

b) Olkoot $A_j \subset \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{N}$ ja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Osoita, että

$$f(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(A_j)$$

ja

$$f^{-1}(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j)$$

[8] Kirjallisena palautetuista tehtävistä voi saada 0-2 pistettä bonuksena kevään 2014 loppukokeeseen.

RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Laskuryhmä/Ohjaus 5, 23.4.2014

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. a) Osoita, että $]0,1[\subset \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$.
b) Osoita, että $A\subset B$ jos ja vain jos $B^c\subset A^c$.
c) Osoita, että $A\subset B$ jos ja vain jos $A\cup B=B$.

22. Olkoon $a<b$. Osoita, että on olemassa avoimet välit $]a_n,b_n[$, $n=1,2,\ldots$ siten, että

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[=[a,b]\,.$$

23. Osoita, että

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},1]=]0,1]\,.$$

24. Totea DeMorganin lait:

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c \quad \text{ja } (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

25. Olkoon $f:A\to B$. Näytä, että kaikille $E\subset B$ pätee

$$f^{-1}(B\setminus E)=A\setminus f^{-1}(E)\,.$$

26. Olkoon $x_0\in]a,b[$. Näytä, että on olemassa $r>0$, jolle $[x_0-r,x_0+r]\subset]a,b[$.