RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Harjoitus 4, 22.4.2014
Harjoitukset luentoaikaan klo 10, salissa D202

1. Olkoon (x_n) rajoitettu jono. Näytä (käyttämättä Bolzano-Weierstrassin lausetta), että on olemassa osajono (x_{n_j}), joka on Cauchy.

2. Olkoon f jatkuva funktio. Näytä, että suljetun välin kuvajoukko $f([a,b])$ on rajoitettu.

3. Sanotaan, että reaalilukujoukko $K \subset \mathbf{R}$ on *jonokompakti*, jos jokaisella jonolla $x_n \in K$ on osajono (x_{n_j}), joka suppenee kohti jotain pistettä $x_0 \in K$. Osoita, että suljettu väli $[a,b]$ on jonokompakti.

4. Osoita, että puoliavoin väli $]a,b]$ ei ole jonokompakti.

5. Osoita, että $f(K)$ on aina jonokompakti, mikäli K on jonokompakti ja f on jatkuva.

6. Osoita, että jonokompakti joukko K on aina rajoitettu.

7. Olkoon K jonokompakti. Näytä, että jokainen Cauchy-jono $x_n \in K$ suppenee kohti jotain pistettä $x_0 \in K$.

8. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio ja K jonokompakti. Näytä, että on olemassa sellainen $x_0 \in K$, jolle

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in K\}.$$

9. (Palauta kirjallisena) Olkoon (x_n) sellainen reaalilukujono, että

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n+1}| \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

Osoita, että $x_n - x_{n+1} \to 0$ ja (x_n) on Cauchy-jono. Anna esimerkki edellisen ehdon toteuttavasta jonosta x_n, jolle $x_1 = 1$ ja $x_n \to \frac{1}{2}$.

---

[9]Kirjallisena palautetuista tehtävistä voi saada 0-2 pistettä bonuksena kevään 2014 loppukokeeseen.

RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Laskuryhmä/ohjaus 4, 10.4.2014

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Olkoon (x_n) reaalilukujono, joka suppenee kohti lukua x_0. Osoita, että joukko

$$K = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

on jonokompakti.

22. Olkoon K jonokompakti (ks tehtävä 3) ja $x_0 \notin K$ osoita, että in olemassa $\delta > 0$, jolle $x \notin K$ kaikilla x, joilla $|x - x_0| < \delta$.

23. Olkoon K rajoitettu joukko. Jos on olemassa avoimet välit $I_1, I_2, \dots, I_n$, joilla

$$K = \mathbf{R} \setminus (I_! \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n),$$

niin K on jonokompakti

24. Olkoon K rajoitettu joukko. Jos on olemassa avoimet välit $I_1, I_2, \dots,$ joilla

$$K = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,$$

niin K on jonokompakti