RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Harjoitus 3, 7.4.2014

1. Olkoon (x_n) sellainen reaalilukujono, jolle osajono x_{2n} on nouseva ja osajono x_{2n+1} on laskeva. Osoita, että jono (x_n) suppenee, mikäli $x_n - x_{n+1} \to 0$.

2. Olkoon
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}.$$
Osoita, että jono (x_n) suppenee.

3. Olkoon (x_n), $n \in \mathbf{N}$, jono reaalilukuja. Oletetaan, että on olemassa äärettömän monta sellaista lukua $m \in \mathbf{N}$, joille
$$x_k < x_m \quad \text{kaikilla } k > m.$$
Osoita, että jonolla (x_n) on vähenevä osajono.

4. Olkoon (x_n), $n \in \mathbf{N}$, jono reaalilukuja. Oletetaan, että on olemassa vain äärellisen monta sellaista lukua $m \in \mathbf{N}$, joille
$$x_k < x_m \quad \text{kaikilla } k > m.$$
Osoita, että jonolla (x_n) on kasvava osajono.

5. Näytä, että sisäkkäisten välien periaate seuraa Bolzanon lauseesta

6. Näytä, että sisäkkäisten välien periaate seuraa suoraan täydellisyysaksioomasta: Jos $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$ on jono sisäkkäisiä suljettuja välejä, niin osoita, että
$$\inf_k b_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \,.$$

7. Olkoon (a_n) reaalilukujono. Määritellään
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{ja} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$
missä
$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\} \quad \text{ja} \quad c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}.$$
Osoita, että yo. raja-arvot ovat olemassa (mahdollisesti $\pm\infty$) ja
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

---

[2] Vihje: tehtävä 1.

[4] Tehtävistä 3 ja 4 seuraa, että jonolla (x_n) on aina monotoninen osajono, joten Bolzano-Weierstrassin lause seuraa monotonisen jonon raja-arvon olemassaolosta.

[5] Vihje: Antiteesi: on jono $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ sisäkkäisiä suljettuja välejä joilla $\cap_n [a_n, b_n] = \emptyset$. Tällöin funktio
$$f(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{jos } x < a_n \text{ jollakin } n \\ 1\,, & \text{jos } x > b_n \text{ jollakin } n \end{cases}$$
on antiteesin nojalla hyvin määritelty ja jatkuva koko $\mathbf{R}$:ssä, mikä on ristiriita Bolzanon lauseen kanssa.

8. Osoita, että

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbf{R}$$

jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

9. (Palauta kirjallisena) Olkoon (x_n) reaalilukujono. Näytä, että $x_n \to x_0 \in \mathbf{R}$ joss jono (x_n) on rajoitettu ja jokaiselle jonon (x_n) suppenevalle osajonolle (x_{n_j}) pätee

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0.$$

Osoita esimerkillä, että käänteinen implikaatio ei päde ilman oletusta, että (x_n) on rajoitettu.

[9]Kirjallisena palautetuista tehtävistä voi saada 0-2 pistettä bonuksena kevään 2014 loppukokeeseen.

RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Laskuryhmä/Ohjaus 3 , 3.4.2014

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Olkoon $x_n \to x_0$. Osoita, että jonolla (x_n) on monotoninen osajono.

22. Näytä, että Bolzanon lause seuraa sisäkkäisten välien periaatteesta.

23. Olkoon (a_n) reaalilukujono. Osoita, että on olemassa sellaiset osajonot (a_{n_j}) ja (a_{n_k}), joille

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

24. Olkoon (x_n) reaalilukujono. Näytä, että $x_n \to x_0 \in \mathbf{R}$ joss jokaiselle jonon (x_n) osajonolle (x_{n_j}) pätee

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0.$$

25. Olkoon (x_n) Cauchy-jono. Näytä, että jono $|x_n|$ suppenee.