RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Harjoitus 2, 31.3.2014

1. Olkoon $f : [0,1] \to [0,1]$ jatkuva funktio, jolle $f(0) = 0$ ja $f(1) = -3$. Osoita, että on olemassa sellainen piste $x_0 \in [0,1]$, jolle $f(x_0) = 0$ ja $f(x) < 0$ kaikilla $x \in [0,1]$, $x > x_0$.

2. Olkoon $f : [0,1] \to [0,1]$ jatkuva. Osoita, että funktiolla f on kiintopiste eli piste $x_0 \in [0,1]$, jolle $f(x_0) = x_0$.

3. Osoita: jos $x_n \to x_0$, niin $x_n - x_{n+1} \to 0$. Osoita esimerkillä, että käänteinen implikaatio ei ole tosi (millään x_0).

4. Olkoon $x_1 = \sqrt{2}$ ja $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \in \mathbf{N}$. Näytä, että jono (x_n) suppenee ja määrää sen raja-arvo.

5. Osoita, että täydellisyysaksiooma seuraa Bolzanon lauseesta.

6. Osoita, että täydellisyysaksiooma seuraa rajoitetun monotonisen jonon raja-arvon olemassaolosta.

7. Olkoot $a_k \geq 0$, $k \in \mathbf{N}$ ja

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Näytä, että jono s_n suppenee, jos ja vain jos se on rajoitettu.

8. Olkoon

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Näytä, että $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

---

[3]Vihje: Esimerkiksi $x_n = \log n$.

[5]Vihje: Antiteesi: on sellainen ylhäältä rajoitettu, epätyhjä joukko A, jolla ei ole (reaalista) supremumia. Osoita, että tällöin funktio

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } x \text{ ei ole joukon } A \text{ yläraja} \\ 1, & \text{jos } x \text{ on joukon } A \text{ yläraja}, \end{cases}$$

olisi jatkuva, mikä on ristiriita.

[6]Vihje: Konstruoidaan vähenevä jono M_n: Olkoon M_1 jokin joukon A yläraja ja valitaan M_{n+1}: jos $M_n = \sup A$, asetetaan $M_{n+1} = M_n$; muutoin olkoon

$$k_n = \min\{k \in N : M_n - \frac{1}{k} \text{ on joukon } A \text{ yläraja}\}$$

ja asetetaan $M_{n+1} = M_n - \frac{1}{k_n}$. Näytä, että näin löydetään $\sup A = \lim_{n\to\infty} M_n$.

[7]Jos jono s_n suppenee kohti jotain reaalilukua s, sanotaan. että *sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee ja sen summa on* $= s$.

9. (Palauta kirjallisena) Olkoon $x > 0$ ja $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$. Määritellään luvut $a_0, a_1, a_2 \dots$ induktiivisesti: Olkoon

$$a_0 = \sup\{m \in \mathbf{Z} : m \leq x\}$$

ja kaikilla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$a_{n+1} = \sup\{m \in \mathbf{Z} : r_n + \frac{m}{k^{n+1}} \leq x\}\,,$$

missä

$$r_n = a_0 + a_1 k^{-1} + a_2 k^{-2} + \cdots + a_n k^{-n}$$

Osoita, että

a) $0 \leq a_n \leq k - 1$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$.
b) $r_n \in \mathbf{Q}$ ja
c) $x = \sup\{r_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$.

[9] Kirjallisena palautetuista tehtävistä voi saada 0-2 pistettä bonuksena kevään 2014 loppukokeeseen.

RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Laskuryhmä/Ohjaus 2, 27.3.2014

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Olkoot $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ja $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ jatkuvia. Jos $f(0) < g(0)$, niin osoita, että joko $g(x) > f(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$ tai on olemassa sellainen x_0, jolle $f(x_0) = g(x_0)$.

22. Osoita, että Bolzanon lause seuraa rajoitetun monotonisen jonon raja-arvon olemassaolosta: Olkoon $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ jatkuva, $f(0] < 0 < f(1)$. Konstruoidaan kasvava jono x_n: Olkoon $x_1 = 0$ ja olkoon $(n \in \mathbf{N})$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{k_n},$$

missä

$$k_n = \min\{k \in N : f(x) < 0 \text{ kaikilla } x \in [0, x_n + \frac{1}{k}]\}$$

Osoita, että tällöin $x_n \to x_0$ ja $f(x_0) = 0$.

23. Osoita, että rajoitetun monotonisen jonon raja-arvon olemassaolo seuraa Bolzanon lauseesta: Antiteesi: on sellainen ylhäältä rajoitettu kasvava jono x_n, joka ei suppene. Osoita, että tällöin funktio

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos on olemassa jokin } x_n \geq x \\ 1, & \text{jos } x_n < x \text{ kaikilla } n, \end{cases}$$

olisi jatkuva, mikä on ristiriita Bolzanon lauseen kanssa.

24. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio ja $z \in [a,b]$. Olkoon $x_1 = f(z)$ ja $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbf{N}$. Osoita: jos $x_n \to x_0$, niin $f(x_0) = x_0$.

25. Olkoon $f :]0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{jos } x = \frac{m}{n} \quad \text{joillakin } n, m \in N, \quad \text{(supistetussa muodossa)} \\ 0 & \text{muilla } x. \end{cases}$$

Osoita, että f on epäjatkuva täsmälleen joukossa $]0,1] \cap \mathbf{Q}$.