RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Harjoitus 1, 24.3.2014

1. Osoita, että kompleksiluvut $\mathbf{C}$ toteuttavat kunta-aksioomat (Ḱ1)-(Ḱ5).

2. Näytä, että luku $m \in \mathbf{R}$ on joukon A alaraja, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee:

$$m - \varepsilon \leq a \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

3. Olkoon $m \in \mathbf{R}$ on joukon A eräs alaraja. Osoita, että $m = \inf A$, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on sellainen $a \in A$, jolle

$$m > a - \varepsilon.$$

4. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä joukkoja. Osoita, että

$$\sup C = \sup A + \sup B\,,$$

kun

$$C = \{a + b : a \in A\,,\, b \in B\}.$$

5. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä joukkoja. Osoita, että

$$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}\,.$$

Mitä voit sanoa luvusta $\sup(A \cap B)$?

6. Määrää (huolellisesti perustellen) $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \{x \in \mathbf{R} : |2x + \pi| < \sqrt{2}\}\,.$$

7. Määrää (huolellisesti perustellen) $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \{x + \frac{1}{x} : x > 0\}\,.$$

8. Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Määrää kaikki $x \in \mathbf{R}$, joilla

$$|x + a| = |x| + |a|.$$

9. (Palauta kirjallisena) Määrää huolellisesti perustellen

$$\sup\{\frac{k}{n} : k, n \in \mathbf{N},\ k^2 \leq 2n^2\}.$$

[9]Kirjallisena palautetuista tehtävistä voi saada 0-2 pistettä bonuksena kevään 2014 loppukokeeseen.

RAP: Yhden reaalimuuttujan analyysin perusteet
Laskuryhmä 1, 20.3.2014

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä, rajoitettuja joukkoja. Osoita, että

$$\inf D = \inf A - \sup B \,,$$

kun

$$D = \{a - b : a \in A \,,\, b \in B\}.$$

Entä jos oletus rajoittuneisuudesta poistetaan?

22. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$ epätyhjiä joukkoja. Osoita, että

$$\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\} \,.$$

23. a) Näytä, että kaikilla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ pätee:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \,.$$

b) Voiko käydä niin, että

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| \leq |x_1 + x_2 + x_3| \,?$$

Selitä!

24. Näytä, että kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$ pätee:

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \quad \text{ja} \quad \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

25. Osoita huolella:

$$a \leq b \quad \text{jos ja vain jos } a < b + 100\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0 \,.$$

26. On osoitettava, että annettu luku q on $< \sqrt{7}$. Kuinka toimit? Perustele päättelysi pätevyys.