

Mitta- ja integraaliteoria
Harjoitus 3, 1.10.2010

- 1.** Osoita, että kaikilla $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $t > 0$:

$$m^*(\{tx \in \mathbf{R}^n : x \in A\}) = t^n m^*(A).$$

- 2.** Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}^n$ siten, että $m^*(B) = 0$. Tällöin

$$A \in \mathcal{M} \quad \underline{\text{joss}} \quad A \cup B \in \mathcal{M}.$$

- 3.** Olkoot $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ ja $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ Riemann-integroituva. Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

on Lebesgue-mitallinen ja

- 4.** (jatko...)

$$m_2^*(A) = \int_a^b f(x) dx.$$

- 5.** Laske kiekon

$$\bar{B}(x_0, r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x_{01} - x)^2 + (x_{02} - y)^2 \leq r^2\}$$

Lebesgue-ulkomitta $m_2^*(B(x_0, r))$.

- 6.** Näytä, että on olemassa suljettu joukko $C \subset \mathbf{R}^n$, jolle $m^*(C) = 1$ ja $\text{int}(C) = \emptyset$.

- 7.** Olkoon $f : \mathbf{R}^n \rightarrow]0, \infty[$ sellainen, että joukot

$$\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > \lambda\}$$

ovat Lebesgue-mitallisia kaikilla $\lambda > 0$. Näytä, että

$$m^*(\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \geq \lambda\}) > 0 \quad \text{jollakin } \lambda > 0.$$

- 8.** Olkoot $I_j \subset \mathbf{R}^n$ avoimia n -väljä siten, että

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{I}_j = \mathbf{R}^n \quad \text{ja} \quad I_j \cap I_k = \emptyset, \quad \text{kun } j \neq k.$$

Osoita, että kaikilla Lebesgue-mitallisilla $A \subset \mathbf{R}^n$:

$$m^*(A) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A \cap I_j)$$

- 9.** Määräää

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(B^n(0, 1)),$$

missä $B^n(0, 1)$ on yksikköpallo \mathbf{R}^n :ssä.