Johdatus matematiikkaan
Tero Kilpeläinen

Syksy 2011

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Mitä matematiikka on?

Tällä kurssilla jutellaan, mitä sattuu mieleen tulemaan. Kurssin suoritusta (ja muuta oppimista) varten on syytä tutustua Petri Juutisen kirjoittamaan monisteeseen, jonka voi ladata sivulta

http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATP100_PJ.pdf

Helposti lähestyttävä todistamisen alkeisoppikirja on Richard Hammackin "BOOK OF PROOF", joka on ilmaiseksi ladattavissa sivulta

http://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/index.html

Mitä matematiikka on?

Tämän kurssin tarkoituksena on houkutella kuulijoita sukeltamaan matematiikan ihmeelliseen maailmaan.
Tällä kurssilla annetaan näytteitä matemaattisesta päättelystä; jotkut periaatteet ovat opittavissa, mutta tärkeintä on saada jonkinlainen kosketus matemaattiseen ajattelumaailmaan.
Matematiikkaa on vaikeaa määritellä, mutta jotain sen luonteesta voidaan sanoa:

- M on H
- M on H
- Matematiikka on Hyödyllistä!
- Matematiikka on Hauskaa!

Mitä matematiikka on?

Matematiikka on deduktiivinen tiede, jossa tosista premisseistä eli lähtökohdista tai ehdoista seuraa tosi johtopäätös.

Koulumatematiikassa opitaan lähinnä keinoja laskea sitä tai tätä sekä (mahdollisesti) soveltamaan annettuja kaavoja tms. Kun tekniikat monimutkaistuvat, tulee tarpeelliseksi ymmärtää niiden takana olevia käsitteitä ja periaatteita.

Matematiikan opinnoissa tarkoitus on oppia ymmärtämään laajemmin matemaattisia rakenteita ja ymmärtämään, miksi ne ovat tosia. Samalla opitaan myös tieteessä käytettävä täsmällinen argumentointitapa.

Toisaalta matematiikan opintojen aikana on tarkoitus tutustua eräsiiin (mm. sovellusten kannalta) keskeisiin matematiikan teorioihin, jolta pohjalta tulee mahdolliseksi luoda uutta tietoa.

(Tähän katsaus opintoihin?)

Matematiikan rakenne

Matematiikka on olemukseltaan teoreettista, vaikka monet kysymyksenasettelut lähtevät käytännöllistä (tai muiden tieteiden esiinnostamista) ongelmista.

Matematiikka sovelletaan lukuisissa eri kohteissa emmekä yleensä ajattele, että monet arkipäiväset laitteet jne toimivat, koska on kehitetty tiettyjä matematiikan teorioita.

Ennen kunnollista soveltamista on ymmärrettävä itse matematiikkaa.

Matematiikan voi ajatella olevan eräänlainen *kieli*. Opintojen alussa menee yleensä jonkinverran aikaa, ennenkuin uuden kielen käyttö omaksutaan.

Matematiikan rakenne

Matematiikan ainesosasia ovat käsitteet, oletukset, väitteet ja päättely. Muita nimityksiä näille:

Aksiooma

Aksiooma (perusoletus, selviö) on jotain, jonka oletetaan olevan totta, tai joka on *ilmiselvästi* totta. Aksiooma on siis senkaltainen perusoletus, jota ei kyseenalaisteta. Näiden määrä on syytä olla vähäinen eivätkä ne saa olla keskenään ristiriitaisia. Tällä kurssilla ei juurikaan puututa aksioomajärjestelmiin.

Määritelmä

Määritelmät ovat yksi tärkeimmistä matemaattisen kielen osista. Ne on syytä omaksua kirjaimellisesti!
Määritelmä antaa ylensä lyhyen tavan ilmaista käsitteen sisältö antamalla sille nimi; usein määritelmässä annetaan myös sisältö symbolille.

Matematiikan rakenne

Esimerkkimääritelmä

Reaaliluvun x itseisarvo on luku

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x\,, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Määriteltyjen käsitteiden avulla voidaan muodostaa teoreemoja, väitelauseita, mutta aina käsitten määrittelyn yhteydessä on hyvä ensin pysähtyä analysoimaan määritelmää, antaa siitä esimerkkejä (ja vastaesimerkkejä eli esimerkkejä tapauksista, joissa määritelmä ei toteudu).

Lause

Lauseissa yleensä pyritään ilmaisemaan yleinen tosiseikka. Lauseet ovat yleensä muotoa ”sen ja sen oletuksen ollessa voimassa tämä ja tuo on myös totta.”

Esimerkkilause (Kolmioepäyhtälö)

Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee:

$$|a+b| \leq |a| + |b| \, .$$

Varsinaisia lauseita (teoreemia) vähäarvoisempia tuloksia kutsutaan usein *propositioiksi* tai tylysti *väitteiksi*.

Lemma on apulause, joka on tarpeellinen helpottamaan päättelyn seuraamista, mutta useinkaan lemmat eivät ole yleisemmin mielenkiintoisia (poikkeuksiakin toki on!).

Lemma

Kaikille reaaliluvuille x pätee :

$$x \leq |x| \, .$$

Matematiikan rakenne

Todistus

Todistus on lauseen yksityiskohtainen johto tai perustelu lähtien aksioomista käyttämällä logiikan päättelysääntöjä sekä tunnettuja (se on todistettuja!) lauseita. Käytännössä todistus on sellainen väitteen perustelu, joka sisältää rittävästi yksityiskohtia, jotta lukija/kuulija voi vakuuttautua väitteen totuudellisuudesta.
Todistukset ovat matematiikan keskeisin osa, samalla vaikein ja mielenkiintoisin osa.
Sellaisia asioita voit pitää itsestäänselvinä, joille osaat antaa todistuksen milloin vain.

Esimerkkitodistus lemmalle

Aloitetaan apulauseen todistuksella

Lemma

Kaikille reaaliluvuille x pätee :

$$x \leq |x| .$$

Lemman todistus.

Tapaus 1. $x \geq 0$. Tällöin väite on selvä, sillä ei-negatiivisille x:

$$|x| = x \geq x .$$

Tapaus 2. $x < 0$. Tällöin $|x| = -x$, ja siis

$$x < 0 < -x = |x| ,$$

joten väite "$x \leq |x|$" on tosi kaikilla reaaliluvuilla x.

$\square$

Esimerkkitodistus kolmioepäyhtälölle

Esimerkkilause (Kolmioepäyhtälö)

Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee:

$$|a+b| \leq |a| + |b| \,.$$

Seuraavaksi pyrimme todistamaan tämän lauseen, so. vakuuttamaan itsemme ja muut, että väite on tosi. Todistuksen keksimistä varten on usein hyvä tehdä esimerkkejä ja koittaa niiden avulla keksiä todistusta – ja selvittää olisiko väite ilmeisesti väärin.

Esimerkki.

- Jos $a = 2$, $b = 7$, niin
  $|a+b| = |2+7| = |9| = 9 = 2+7 = |a| + |b|$ eli ok.
- Jos $a = 2$, $b = -7$, niin
  $|a+b| = |2-7| = |-5| = 5 < 9 = 2+7 = |a| + |b|$ eli ok.

Esimerkkitodistus kolmioepäyhtälölle

Toinen tapa yrittää keksiä todistusta on muiden todistusten miettiminen ja matkiminen, josko niistä löytyisi ideoita tähän tilanteeseen. Voimme yrittää jakaa käsittelyn eri tapauksiin kuten teimme äsken todistamassamme lemmassa:

1. $a \geq 0$ ja $b \geq 0$.
2. $a \geq 0$, $b < 0$ ja $a + b \geq 0$.
3. $a \geq 0$, $b < 0$ ja $a + b < 0$.
4. $a < 0$, $b \geq 0$ ja $a + b \geq 0$.
5. $a < 0$, $b \geq 0$ ja $a + b < 0$.
6. $a < 0$ ja $b < 0$.

Näin voitaisiin edetä ja saada aikaiseksi (tylsä) todistus kolmioepäyhtälölle. Osoittautuu, että käyttämällä edeltävää lemmaa, saamme lyhyen todistuksen jakamalla käsittelyn kahteen osaan, tapauksiin $a + b \geq 0$ ja $a + b < 0$.

Esimerkkitodistus kolmioepäyhtälölle

Esimerkkitodistus kolmioepäyhtälölle.

Tapaus 1. $a + b \geq 0$. Tällöin $|a + b| = a + b$, joten lemman avulla

$$|a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b| \, .$$

Tapaus 2. $a + b < 0$. Tällöin $|a + b| = -(a + b) > 0$, joten lemman nojalla

$$|a + b| = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b| \, .$$

$\square$

Geometrian todistus

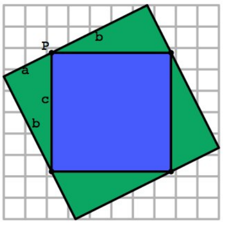
Pythagoraan lause lienee eräs tunnetuimmista matematiikan lauseista; sille on yli 400 todistusta, joista seuraavassa yksi.

Pythagoraan lause

Jos suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat a ja b ja hypotenuusan pituus on c, niin

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Todistus.



Isomman neliön ala on pienemmän (sinisen) neliön ala + 4 kertaa (vihreiden) kolmioiden alat eli

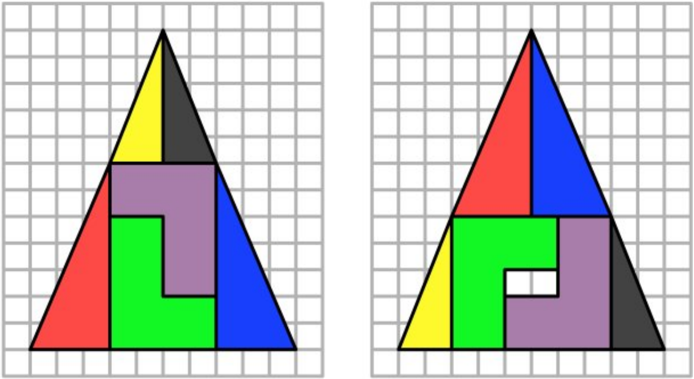
$$(a+b)^2 = c^2 + 4(\frac{1}{2}ab) \quad \text{eli}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab} \quad \text{eli}$$

Kuva voi valehdella!

Pythagoraan lauseen todistus perustui paljolti havaintokuvaan.
Kuvista on usein apua, mutta ei aina!



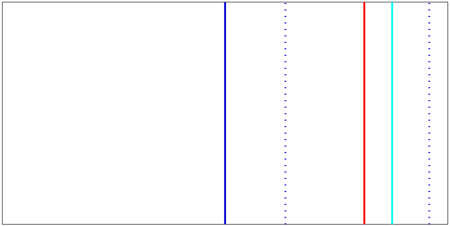
Mikä yllä olevissa kuvissa menee pieleen?
(Ellet keksi, voit etsiskellä hakusanalla "curry triangle".)

Kultainen leikkaus

Kultainen leikkaus on luku, joka on kiehtonut ihmisiä, niin matemaatikoja kuin muitakin, vuosisatoja. Kultainen leikkaus määritellään sellaisen suorakulmion sivujen pituuksien suhteeksi, jolla on seuraava ominaisuus: jos leikkaat suorakulmiosta pienemmän sivun kokoisen neliön pois, jäljelle jää alkuperäisen suorakulmion kanssa yhdenmuotoinen suorakulmio.

Kultainen leikkaus

Kultaisen leikkauksen olemassaolo on helppo havaita kasvattamalla neliötä yhdestä sivusta isommaksi suorakaiteeksi.



Aluksi neliön päätyyn lisättävä suorakaide on liian ohut ollakseen alkuperäisen muotoinen; kun saavutetaan kahden neliön kokoinen suorakaide, on lisätty suorakulmio liian paksu. Siis jossain välissä on kultaisen leikkauksen suhteet omaava suorakulmio (punainen).

Kultainen leikkaus

Kultainen leikkaus on sellaisen suorakulmion sivujen pituuksien suhteeksi, jolla on ominaisuus, että jos leikkaat suorakulmiosta pienemmän sivun kokoisen neliön pois, jäljelle jää alkuperäisen suorakulmion kanssa yhdenmuotoinen suorakulmio.
Toinen tapa on laskea kultaisen leikkauksen arvo: olkoon x pidempi kultaisen leikkauksen suhteessa olevan suorakaiteen sivuista, ja toisen pituus olkoon 1.
Yhdenmuotoisuudesta saadaan

$$x = \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}\,,$$

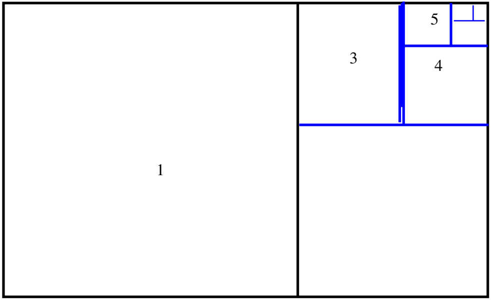
josta

$$x(x-1) = 1 \quad \text{eli} \quad x^2 - x - 1 = 0\,.$$

Tästä ratkaisemalla (ja ottamalla ei-negatiivinen ratkaisu) saadaan

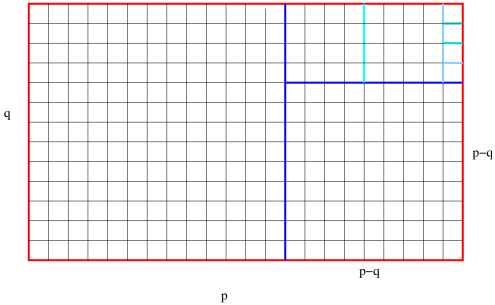
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,.$$

Kultaisen leikkauksen irrationaalisuus



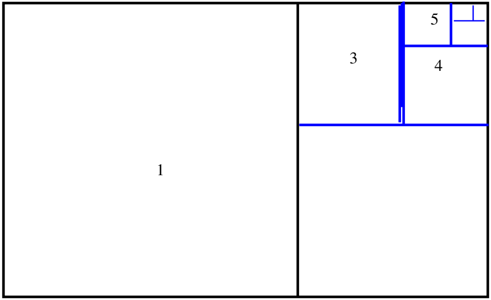
Tarkastellaan seuraavaa prosessia: Leikataan kultaisen leikkauksen suhteet omaavasta suorakulmiosta neliö pois, jolloin jää yhdenmuotoinen suorakaide. Tehdään sille sama neliön poisleikkaus –jälleen jää alkuperäisen suorakaiteen muotoinen suorakaide. Näin voidaan jatkaa loputtomiin ja aina jäljellä on alkuperäisen suorakaiteen muotoinen suorakaide.

Kultaisen leikkauksen irrationaalisuus



Tehdään sama prosessi suorakaiteelle jonka sivut ovat kokonaislukuja p ja q (tämä tarkastelu kattaa kaikki suorakulmiot, joiden sivujen pituuksien suhteet ovat rationaalisia) : Leikaamalla suorakulmiosta $q \times q$ neliö pois ($p \geq q$) jää suorakaide, jonka sivut ovat p ja $p - q$. Tätä prosessia ei voida jatkaa loputtomiin, korkeintaan $p \times q$ kertaa, koska kaikkiein poisotettavien neliöiden sivut ovat kokonaislukuja ja alkuperäisessä suorakulmiossa on vain $p \times q$ pikkuneliötä. Prosessi siis päättyy.

Kultaisen leikkauksen irrationaalisuus



Yhteenveto:

- Jos suorakulmiolla sivuilla on kultaisen leikkauksen suhde, ositusprosessi jatkuu loputtomiin.
- Jos suorakulmiolla sivujen suhde on rationaaliluku, ositusprosessi päättyy äärellisen monen askeleen jälkeen.
- Siis kultainen leikkaus (ja siten myös $\sqrt{5}$ – miksi?) on irrationaaliluku.

Todistuksen rakenne

Kultaisen leikkauksen irrationaalisuustodistuksen rakenne on seuraava:

$$P \implies L$$

$$Q \implies \neg L \quad \text{eli} \quad L \implies \neg Q$$

$$\text{Siis } P \implies \neg Q$$

Tässä: olkoon x suorakulmion S sivujen suhde.

P "x on kultainen leikkaus"

L "Suorakulmion ositusprosessi jatkuu loputtomiin."

Q "x on rationaaliluku."