Johdatus matematiikkaan - tarinaosasto
Tero Kilpeläinen

Syksy 2011

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Mitä todistettavaa?

Seuraavassa esimerkkejä lauseista, joiden todistukset eivät ole ilmeisiä.

Aritmetiikan peruslause

Jokainen luonnollinen luku voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla alkulukujen tulona.

Miksi?

Pieniä lukuja tarkastelemalla voisi luulla, että yksikäsiteisyys on helppo. Esimerkiksi

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \quad \text{ja } 74 = 2 \times 37$$

ja on melko selvää, ettei näitä voi toisella lailla esittää. Entäpä miten selvität, että

$$7 \times 13 \times 19 \neq 37 \times 47\,?$$

Entäpä miten selvität laskematta, että

Mitä todistettavaa?

Kuriositeetti

Luku 1729 on ns. *Hardy-Ramanujanin luku*; se on pienin kokonaisluku, joka voidaan esittää kahdella eri tavalla kahden kuution summana

$$1^3 + 12^3 = 1729 = 9^3 + 10^3$$

Mitä todistettavaa?

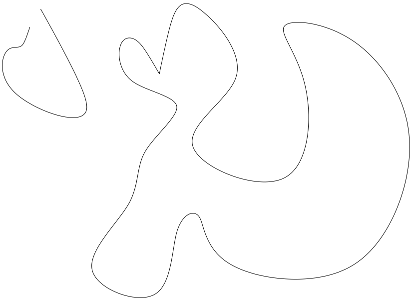
Apilanlehtisolmu (trefoil knot)

Voit helposti pujotella narusta tms. kuvan muotoisen objektin, kun liität narun päät yhteen.

Voidaanko solmu avata katkaisematta narua? Selvästikään solmua ei voida avata yksinkertaisella tavalla, mutta mistä voit tietää, ettei ole erittäin monimutkaista tapaa avata tätä solmua?

Mitä todistettavaa?

Tason käyrä on viiva, jonka voit piirtää nostamatta kynää paperista.
Tason käyrä on yksinkertainen, ellei se koskaa leikkaa itseänsä.
Edelleen käyrä on suljettu, mikäli loppuu samaan pisteeseen, mistä alkoi.



Jordanin käyrälause

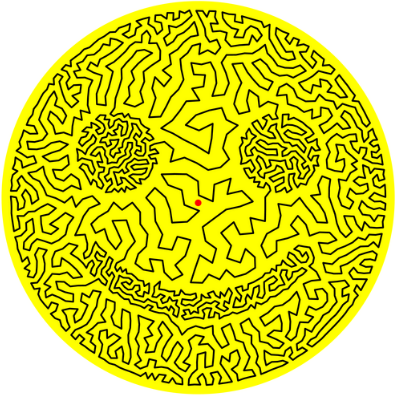
Yksinkertainen suljettu käyrä jakaa tason kahteen osaan, yhtenäiseen sisäosaan ja yhtenäiseen ulko-osaan.

Tarvitseeko tätä todistaa? Eikö ole itsestään selvää?

Mitä todistettavaa?

Jordanin käyrälause

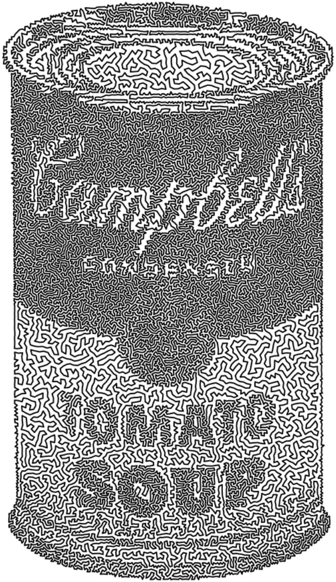
Yksinkertainen suljettu käyrä jakaa tason kahteen osaan, yhtenäiseen sisäosaan ja yhtenäiseen ulko-osaan.

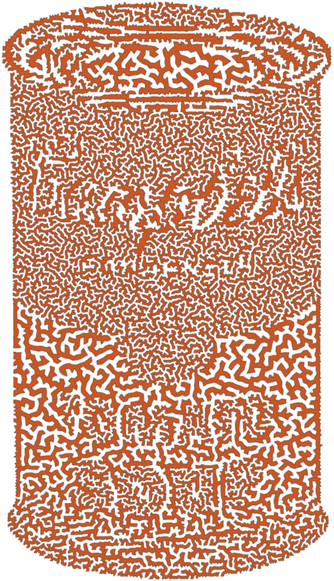


Sisällä vai ulkona?

Sisällä!

Mikä on sisäpuoli?

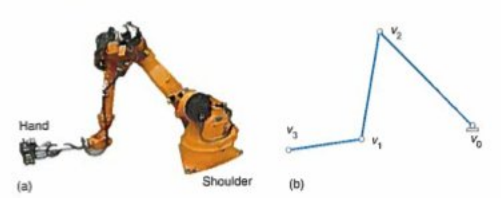




Kuvaviitteet

Edelliset Robert Boschin taiteilemat kuvat ovat sivuilta:
`www.oberlin.edu/math/faculty/bosch/`
`making-tspart-page.html`
ja
`www.oberlin.edu/math/faculty/bosch/tspart-page.html`

Robottikäsi



Redusoidaan robottikäsivarsi *matemaattiseksi malliksi*: äärellisen monta janaa yhdistyy päätepisteistään toisiinsa peräkkäin (linkkipisteet ovat robotin niveliä).Koska robotin käsivarret eivät voi mennä itsensä läpi, vaadimme matemaattisessa mallissa että em. janat eivät voi leikata toisiansa kuin vain päätepisteissänsä. Robotin tarttumakäsi on tässä mallissa vain piste.

Siis robottikäsivarren matemaattinen malli koostuu ketjusta, jossa on n janaa, joiden pituudet ovat r_1, $r_2, \ldots,$ r_n

Robottikäsivarren ulottuvuusalue

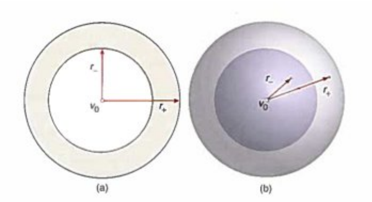
Kysymys: Mihin robottikädellä ylettää? Mikä on sen *ulottuvuusalue* 3-ulotteisessa maailmassa?
Matemaattisessa mallissa kysymys saa muodon: minkä joukon mahdolliset päätepisteet v_n muodostavat, kun robotin alkupista v_0 ja varsien lukumäärä n sekä pituudet r_k, $k = 1, 2, \dots n$, on ennalta annetut?

Lause

Robottikäsivarren ulottuvuusalue on *annulus* eli *rengasalue.*

Robottikäsivarren ulottuvuusalue

Mikä on annulus eli rengasalue? 2-ulotteisessa maailmassa rengasalue on kahden samankeskisen, eri säteisen ympyrän väliin jäävä alue.
3-ulotteisessa tilanteessa korvataan ympyrä pallonkuorella: rengasalue on kahden samankeskisen, eri säteisen pallonkuoren väliin jäävä alue.



Lisäksi sovitaan erikoistapauksia: Jos säteet ovat samat: sovitaan että tässä yhteydessä pallonkuori (ympyränkehä) on myös annulus ja jos pienempi säde on nolla: sovitaan että tällöin pallonkuoren (ympyränkehän) sisään jäävä umpinainen pallo (kiekko) on myös annulus.

Varoitus: eri yhteyksissä annulukseen lasketaan tai ei lasketa kehiä mukaan; ole tässä tarkkana!

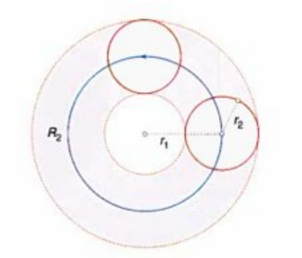
Robottikäsivarren ulottuvuusalueen todistaminen rengasalueeksi

Lause

Robottikäsivarren ulottuvuusalue on *annulus* eli *rengasalue.*

Todistetaan tämä induktiolla "käsivarsien" lukumäärän n suhteen.
Tapaus $n = 1$**.** Tämä on selvää, sillä kiinteän varren päässä oleva piste piirtää pallonkuoren määritelmän mukaan; ja sellainen sovittiin rengasalueeksi.
Todistuksen kannalta voisimme nyt tehdä induktio-oletuksen ja hypätä induktioaskeleen ottamiseen. Havainnon kehittämiseksi tarkastelemme ensin tapausta $n = 2$ eli kaksivartista robottikättä. Olkoot varsien pituudet r_1 ja r_2. Tällä saavutetaan kaikki ne pisteet, jotka ovat r_2:n etäisyydellä ensimmäisen r_1-pituisen varren päätepisteestä v_1. Siis ulottuvuusalue muodostuu sellaisista pallonkuorista, joiden keskipistet ovat v_0 keskisellä pallonkuorella (tapaus $n = 1$) ja säde $= r_2$.

Robottikäsivarren ulottuvuusalueen todistaminen rengasalueeksi

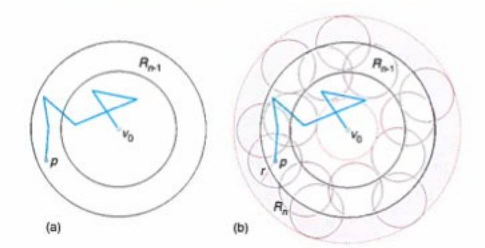


Tästä muodostuu rengasalue, jonka keskipiste on v_0, ulompi säde $r_1 + r_2$ ja sisempi säde $= |r_1 - r_2|$. (Tämä on selvää, jos $r_1 \geq r_2$, mutta vaatii pientä laskua, jos $r_1 < r_2$.)

Robottikäsivarren ulottuvuusalueen todistaminen rengasalueeksi

Induktio-oletus: Ulottuvuusalue on $n-1$ vartiselle robottikädelle rengasalue.
Induktioaskel: Merkitään n-vartista robottikättä K_n:llä. Jos siitä poistetaan viimeinen varsi, jää $n-1$ vartinen robottikäsi K_{n-1}, jonka ulottuvuusalue on induktio-oletuksen mukaan rengasalue R_{n-1}. Olkoon p mv. piste rengasalueessa R_{n-1}, johon siis K_{n-1} robottikäsi ylettyy.

Robottikäsivarren ulottuvuusalueen todistaminen rengasalueeksi



Robottikäsi K_n ylettyy jokaiseen pisteeseen joka on viimeisen varren päässä pisteestä p; nämä pisteet muodostavat p-keskisen pallonkuoren (jonka säde on viimeisen varren suuruinen). Ulottuvuusalue R_n koostuu siis samankokoisista pallonkuorista, joiden keskipisteet käyvät läpi rengasalueen R_{n-1}. Nyt on helppo uskoa, että R_n on rengalue (kuva).

Robottikäsivarren ulottuvuusalueen todistaminen rengasalueeksi

Voidaan kohtuullisella vaivalla todistaa, että rengasalueen R_n ulommainen säde on robottikäsivarsien pituuksien summa. Sisempi säde on pisimmän käsivarren pituus pois muiden summa, mikäli tämä on positiivinen. Jos se ei ole positiivinen, on sisempi säde nolla.