MATP100, Johdatus matematiikkaan
Harjoitus 4, 17.9.2014

1. Todista **induktiolla**:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.
c) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.
d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

2. Luku $n^3 + 3n^2 + 2n$ on kuudella jaollinen, oli n mikä hyvänsä positiivinen kokonaisluku.

a) Todista tämä **induktiolla**.
b) Todista käyttämättä induktiota jakamalla polynomi tekijöihinsä.

3. Näytä, että $n! > 2^n$, kun $n \geq 4$ on kokonaisluku.

4. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

5. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3\,.$$

6. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}\,.$$

7. Todista (induktiolla), että luku, joka koostuu 3^n yhtäsuuresta numerosta, on jaollinen luvulla 3 ($n \in \mathbf{N}$).

8. Olkoon $a_0 > 0$ ja olkoon jono a_n, $n \geq 0$, määritelty rekursiivisesti kaavalla

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}\,.$$

Osoita, että

$$a_n = \frac{a_0}{na_0 + 1}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

[7] Vihje: 3^{k+1}:n numeron luku kannattanee ryhmitellä 3^k:n numeron jaksoihin.