

**MATP100, Johdatus matematiikkaan**  
**Harjoitus 3, 11.9.2014**

1. Tarkastele seuraavia rivejä:

$$\begin{aligned} -2 &= -2 \\ 4 - 6 &= 1 - 3 \\ 4 - 6 + \frac{9}{4} &= 1 - 3 + \frac{9}{4} \\ \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ 2 - \frac{3}{2} &= 1 - \frac{3}{2} \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

Ovatko rivit yhtäpitäviä? Todistaako tämä, että  $2 = 1$ ? Entä, jos lähdet alhaalta ylöspäin?

2. Osoitetaan, että 1 on suurin positiivinen kokonaisluku: "Olkoon  $n$  suurin positiivinen kokonaisluku. Koska  $n \geq 1$ , niin tämän epäyhtälön kertominen puolittain luvulla  $n$  antaa  $n^2 \geq n$ . Koska  $n^2$  on positiivinen kokonaisluku ja  $n$  on sellaisista suurin, on myös  $n^2 \leq n$ . Yhdistämällä nämä epäyhtälöt saadaan  $n^2 = n$ , minkä jakaminen puolittain  $n$ :llä antaa  $n = 1$ ." Selitä, mikä on väärin.

3. Osoita, että kaikille joukoille  $A$  ja  $B$  pätee:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

4. Olkoot  $A, B \subset \mathbf{R}$ . Määritellään *summajoukko*

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

- a) Osoita, että  $\mathbf{Q} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ .
- b) Osoita, että  $\mathbf{Q} + (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .
- c) Osoita, että  $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) + (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \mathbf{R}$

5. a) Luettele joukon

$$A = \{B : B \subset \{a, b, c\}\}$$

kaikki alkiot.

b) Luettele joukon

$$E = (A \cup \{a, b, c\}) \setminus \{c\}$$

kaikki alkiot (tässä  $A$  on määritelty tehtävän a-kohdassa).

6. Olkoon

$$A = \{x \in \mathbf{R} : |x + 1| > 0\} \quad \text{ja} \quad B = \{y \in \mathbf{R} : -y^2 \geq -1\}$$

Määrä joukot  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  ja  $A \setminus B$ .

---

<sup>4</sup>Vihje:  $(a + b) + (-b) = a$ .

7. Olkoon

$$A_1 = \{-1, 0, 1\}, \quad A_2 = \{-2, 0, 2\}, \dots, \quad A_n = \{-n, 0, n\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Määää joukot

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_{100} \quad \text{ja} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_{100}.$$

8. Määää joukot

$$A \cap B, \quad A \cup B \quad \text{ja} \quad A \setminus B,$$

kun

$$A = \{x \in [1, 2[: \mid |x - \frac{7}{4}| \leq \frac{1}{2}\}$$

ja

$$B = \{y \in ]0, 3[: \mid 0 \leq y^2 - y - \frac{1}{4} \leq \frac{23}{4}\}.$$

9. Olkoon  $x \in \mathbf{R}$  ja  $n \in \mathbf{N}$ . Merkitään

$$P_{x,n} = \{y \in \mathbf{R} : y = x^n\}.$$

a) Määää joukko

$$P_{x,1} \cap P_{x,3}.$$

b) Määää joukko

$$P_{2,1} \cup P_{2,2} \cup P_{2,3} \cup \dots \cup P_{2,k}.$$

---

<sup>8</sup>Vihje: Saattaa olla avuksi, jos ensin selvität, mitkä joukot  $A$  ja  $B$  ovat.