

MATP100, Johdatus matematiikkaan
Harjoitus 2, 9.9.2014

1. Muotoile seuraavat väitteet täsmällisesti ja todista ne vääriksi:
- a) Kokonaislukujen summa on positiivinen.
 - b) Irrationaalilukujen summa on irrationaalinen.
 - c) Reaaliluvuille x pätee:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

2. Todista seuraavat väitteet oikeaksi tai vääräksi:

- a) Jollekin positiiviselle x sekä x että $x^2 + 10x + 16$ ovat alkulukuja.
- b) Jollekin positiiviselle x sekä x että $x^2 + 4x + 3$ ovat alkulukuja.
- c) Jollekin positiiviselle x sekä x että $x^2 + x + 1$ ovat alkulukuja.
- d) Jollekin positiiviselle x sekä x että $x^5 + 1$ ovat alkulukuja.

3. Todista seuraavat väitteet oikeaksi tai vääräksi:

- a) Jollekin positiiviselle kokonaisluvulle x pätee: $2^x = x^2$.
- b) Jollekin positiiviselle kokonaisluvulle x pätee: $2^x > x^2$.
- c) Jollekin positiiviselle kokonaisluvulle x pätee: $2^x < x^2$.

4. Muotoile täsmällisesti ja todista: *kahden (reaali)luvun välissä on pienen positiivisen luvun monikerta.*

5. Käyttämällä tehtävää 4 muotoile täsmällisesti ja todista: *kahden (reaali)luvun välissä on rationaaliluku.* (Huomaa, että samanlaisella päättelyllä löydät sieltä väliltä myös irrationaaliluvun.)

6. Osoita, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille n pätee: Jos n^2 on viidellä jaollinen, niin n on myös viidellä jaollinen.

7. Matki $\sqrt{2}$:n irrationaalisuustodistusta ja osoita, että $\sqrt{5}$ on irrationaalinen.

8. Osoita, että 5 on luvun $n^5 - n$ tekijä kaikilla kokonaisluvuilla n .

9. Osoita, että kaikille joukoille A ja B pätee:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

10. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}$. Määritellään *summajoukko*

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

- a) Osoita, että $\mathbf{Q} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$.
- b) Osoita, että $\mathbf{Q} + (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
- c) Osoita, että $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) + (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \mathbf{R}$

²Vihje: muista polynomien jako tekijöihin.

⁴Vihje: piirrä kuva ja käytä esim. ruutuja hyväksesi hahmottaaksesi monikertoja.

⁸Vihje: jaa polynomi $n^5 - n$ tekijöihin ja tutki erikseen luvut $5k$, $5k \pm 1$ ja $5k \pm 2$.

¹⁰Vihje: $(a + b) + (-b) = a$.