MATP100, Johdatus matematiikkaan
Harjoitus 1, 5.9.2014

Tee ennen harjoitustilaisuutta ainakin tehtävät: $1, 2, 3, 5, 7, 11, 12, 13, 17, 19$. Varmista, että tiedät käsitteiden täsmälliset määritelmät. **Ei laskimia!**

1. Osoita, että
$$\frac{1}{1000} - \frac{1}{1002} < \frac{1}{500\,000}.$$
Yleistä päättely ja osoita edelleen, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille n ja k pätee:
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{k}{n^2}.$$

2. Osoita, että
$$\sqrt{1+10^{36}} - \sqrt{10^{36}} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-18}.$$

3. Osoita, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille n pätee:
$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}.$$

4. Osoita, että
$$\sqrt[7]{7!} > \sqrt[6]{6!}\,.$$

5. Jos $a = 10002$ ja $b = 20019$, niin kumpi lauseke on arvoltaan suurempi:
a) ab vai $(a-1)(b+1)$?

b) $\frac{1}{ab}$ vai $\frac{1}{(a-1)(b+1)}$?

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ vai $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b+1}$?

d) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ vai $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{b+1}$?

Entä jos a ja b ovat mitä hyvänsä kokonaislukuja, joille $1 < a < b$?

6. Osoita, että $3 < \pi < 4$ vertaamalla ympyrän kehän pituutta sen ympäri piirretyn neliön reunan pituuteen sekä ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kuusikulmion reunan pituuteen. (Käytä luvun π määritelmänä ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhdetta, ts. *ympyrän kehän pituus*$= \pi \times$ *halkaisijan pituus*. Piirrä kuva!)

7. Olkoon $x \geq 30\,000$. Osoita, että
$$(x + \frac{1}{2})^2 - x^2 > 30\,000\,.$$
Osoita edelleen, että
$$(x + \frac{d}{2})^2 - x^2 < 10^{-10} \quad \text{kaikilla } d, \text{ joilla } 0 < d < \frac{10^{-10}}{4x}.$$

[3] Vihje: saattaa helpottaa, jos tutkii käänteislukuja ja havaitsee esimerkiksi, että $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.
[7] Vihje: laske ensin vasemmat puolet.

8. Osoita, että mikään positiivinen kokonaisluku ei ole sekä parillinen että pariton.

9. Osoita, että jokainen positiivinen kokonaisluku on parillinen tai pariton.

10. Osoita, että positiivinen kokonaisluku n on parillinen täsmälleen silloin, kun n^2 on parillinen.

11. Todista huolellisesti, että positiivisten kokonaislukujen n ja m tulo nm on pariton täsmälleen silloin kun sekä n että m ovat parittomia.

12. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla x pätee:

$$x^2 - 4x + 5 > 0\,.$$

13. Toisen asteen polynomi on muotoa $p(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$.

a) Kirjoita tämä polynomi muotoon

$$p(x) = a(x + d)^2 + f\,,$$

missä luvut d ja f eivät riipu muuttujasta x (ts. määritä d ja f lukujen a, b ja c avulla).

b) Näytä tämän avulla, että p:n mahdolliset nollakohdat toteuttavat kaavan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

14. Osoita, että kaikille positiivisille luvuille x ja y pätee:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}\,.$$

15. Osoita, että kokonaisluku k on jaollinen luvulla 3, jos ja vain jos sen sen neliö k^2 on jaollinen luvulla 3.

16. Osoita, että kokonaisluku k on jaollinen luvulla 3, jos ja vain jos sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 3.

17. Osoita, että rationaalilukujen a ja b summa ja tulo ovat rationaalilukuja.

18. Osoita, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille n pätee:

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5}) \cdots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}.$$

19. Olkoon $a, b \neq 0$ sellaisia, että $a + b = 1$. Osoita, että

$$(1 - \frac{1}{a})(1 - \frac{1}{b}) = 1\,.$$

20. Osoita, että jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n pätee:

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdots (2n - 1)(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n - 1)\,.$$

---

[9] Vihje: Tutki lukua, joka on pienin kokonaisluku, joka ei ole pariton eikä parillinen - ja osoita, ettei sellaista voi olla.

[12] Vihje: Älä vedä ässiä hihasta, vaan muuta lauseke sellaiseen muotoon, josta positiivisuuden näkee selvästi.

[20] Vihje: Huomaa, että vasen puoli on $(2n)!/n!$. Oikean puolen käsittämisessä auttanee havainto, että $(2n)! = 1 \cdot (2 \cdot 1) \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 4) \cdot 9 \cdot (2 \cdot 5) \cdots (2n - 1)(2n)$.