Johdatus matematiikkaan 2011
Harjoitustehtäviä 2

Näitä tehtäviä käsitellään torstaina 15.9.

1. Todista oikeaksi tai vääräksi:

a) Jos $p, q \in \mathbf{Q}$, niin $p + q \in \mathbf{Q}$ ja $pq \in \mathbf{Q}$.
b) Jos $p, q \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, niin $p + q \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ja $pq \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

2. Tarkastele seuraavia rivejä:

$$
\begin{aligned}
-2 &= -2 \\
4 - 6 &= 1 - 3 \\
4 - 6 + \frac{9}{4} &= 1 - 3 + \frac{9}{4} \\
(2 - \frac{3}{2})^2 &= (1 - \frac{3}{2})^2 \\
2 - \frac{3}{2} &= 1 - \frac{3}{2} \\
2 &= 1 \,.
\end{aligned}
$$

Ovatko rivit yhtäpitäviä? Todistaako tämä, että $2 = 1$? Entä, jos lähdet alhaalta ylöspäin?

3. Osoitetaan, että 1 on suurin positiivinen kokonaisluku: ”Olkoon n suurin positiivinen kokonaisluku. Koska $n \geq 1$, niin tämän epäyhtälön kertominen puolittain luvulla n antaa $n^2 \geq n$. Koska n^2 on positiivinen kokonaisluku ja n on sellaisista suurin, on myös $n^2 \leq n$. Yhdistämällä nämä epäyhtälöt saadaan $n^2 = n$, minkä jakaminen puolittain n:llä antaa $n = 1$.” Selitä, mikä on väärin.

4. Osoita, että n:n ensimmäisen parittoman kokonaisluvun summa on n^2.
Mikä on n:n ensimmäisen parillisen kokonaisluvun summa?

5. Näytä, että $n! > 2^n$, kun $n \geq 4$ on kokonaisluku.

6. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \,.$$

7. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \,.$$

8. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Osoita, että luku

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

on jaollinen luvulla 9.

9. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \,.$$

10. Määritellään rekursiivisesti: $a_0 = 2$ ja kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_n = a_{n-1}(a_{n-1} + 1)\,.$$

a) Luettele luvut $a_1, a_2, a_3, \dots, a_5$.

b) Näytä, että luvuilla a_n on ainakin yksi alkulukutekijä, joka ei ole luvun a_{n-1} tekijä.

c) Näytä (induktiolla), että luvulla a_n on ainakin $n + 1$ eri alkulukutekijää.

d) Osoita kohdan c) avulla, että alkulukuja on äärettömän monta.