

Johdatus matematiikkaan 2011

Harjoitustehtäviä 1

Pohdi allaolevia tehtäviä ja ratkaise niistä niin monta kuin ehdit; ensimmäisissä harjoituksissa käsiteltäneen ensimmäisen sivun tehtäviä.

1. Kirjoita todistukset seuraaville väitteille jakamalla tarkastelut sopiviin osiin:

- a) $|x| = |-x|$ kaikilla reaaliluvuilla x .
- b) $|x| \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x .
- c) $|x|^2 = x^2$ kaikilla reaaliluvuilla x .
- d) $|xy| = |x||y|$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y .

2. Todista ns. *käänteinen kolmioepäyhtälö*: Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

3. Merkitään symbolilla $\max(a, b)$ reaaliluvuista a ja b suurempaa, ts.

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{jos } a \geq b \\ b, & \text{jos } a \leq b. \end{cases}$$

Pienempää luvuista a ja b merkitään symbolilla $\min(a, b)$. Todista kaava

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

ja etsi samanlainen kaava minimille.

4. Näytä, että positiivisten reaalilukujen a ja b käänteislukujen keskiarvon käänteisluku on korkeintaan lukujen a ja b keskiarvo.

5. Jos a ja b ovat kokonaislukuja ja $1 < a < b$, niin kumpi lauseke on arvoltaan suurempi:

- a) ab vai $(a - 1)(b + 1)$?
- b) $\frac{1}{ab}$ vai $\frac{1}{(a-1)(b+1)}$?
- c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ vai $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b+1}$?
- d) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ vai $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{b+1}$?

6. Onko

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{198} + \frac{1}{199} < \frac{1}{2}?$$

7. Näytä, että kaikilla reaaliluvuilla x :

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

²Vihje: Älä yritä oikaista! Tässä on neljät itseisarvot, jotka johtaisivat 16 eri tarkastelualueeseen. Tarkastele tapaukset, onko $|a| - |b|$ positiivinen vai ei, jolloin selviät kahdella tapauksella.

⁴Vihje: Muotoile ensin väite (tämä on vaikein osa tehtävää).

8. Näytä, että kaikilla $x > 1$:

$$x > \sqrt{x}.$$

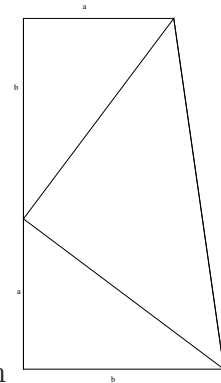
Sanotaan, että positiivinen kokonaisluku n on *parillinen*, jos on olemassa kokonaisluku k siten, että $n = 2k$.

Sanotaan, että positiivinen kokonaisluku n on *pariton*, jos on olemassa kokonaisluku k siten, että $n = 2k + 1$.

9. Osoita, että mikään positiivinen kokonaisluku ei ole sekä parillinen että pariton.

10. Osoita, että jokainen positiivinen kokonaisluku on parillinen tai pariton.

11. Osoita, että positiivinen kokonaisluku n on parillinen täsmälleen silloin, kun n^2 on parillinen.



12. Anna Pythagoraan lauseelle todistus, joka perustuu oheiseen kuvaan (Tämän todistuksen on esittänyt USAn 20. presidentti James A. Garfield.)

13. Olkoon $a < b < c$ peräkkäisiä kokonaislukuja. Tällöin on olemassa sellainen suorakulmainen kolmio, joiden sivujen pituudet ovat a , b ja c , jos ja vain, jos $a = 3$.

¹⁰Vihje: Tutki lukua, joka on pienin kokonaisluku, joka ei ole pariton eikä parillinen - ja osoita, ettei sellaista voi olla.