Analyysi 3
Harjoitus 7, 29.10.2013

1. Määrää potenssisarjojen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^3}(x-x_0)^{n^2}$$

suppenemissäteet.

2. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$ ja

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad \text{kun} \qquad |x| < 1.$$

Osoita, että $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$.

3. Olkoon

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}, \qquad \text{kun } x \in]0,2[\,.$$

Määrää $f'(x)$.

4. Anna funktiolle $f(x) = 1/(1-x)$ potenssisarjaesitys pisteissä $x_0 = 0$ ja $x_0 = -1$. Mitkä ovat sarjojen suppenemisvälit?

5. Tutki funktiosarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^n} + (x-1)^n \right)$$

suppenemista.

6. Etsi funktion $f(x) = \sin^2 x$ Taylor-sarjaesitys origossa.

7. Laske $\cos \frac{120}{\pi}^{\circ}$ neljän desimaalin tarkkuudella.

8. Etsi funktion $f(x) = \log(e + x^2)$ Taylor-sarjakehitelmä origossa ja määrää sen suppenemisväli.

9. Laske

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\,.$$

---

[2]Tästä seuraa: $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ sillä $\frac{d}{dx}(f(x)(1+x)^{-\alpha}) = 0$. (HT)

[4]Vihje: huomaa, että

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}$$

[7]Vihje: Taylor-kehitelmä ja Leibnitzin testi vuorotteleville sarjoille.

[9]Vihje: etsi ensin potenssisarja, joka antaa kyseisen sarjan eräällä x.

Analyysi 3, syksy 2013
Harjoituskoe (tehtäviä ei käsitellä harjoitusryhmissä)

11. Määrää (perustellen) funktioiden

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ja} \quad g(x) = e^{x^2}$$

Taylorin polynomit $T_{n,1}f$ ja $T_{n,0}\,g$.

12. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - n^2} \qquad\qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad ?$$

13. Näytä, että funktiojono $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}},$$

suppenee tasaisesti. Suppeneeko derivaattafunktioiden f_k' muodostama jono?

14. Näytä, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} n 2^{-n} \cos(nx)$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja laske perustellen

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n 2^{-n} \cos(nx)\, dx\,.$$

15. Olkoon a_n vähenevä jono reaalilukuja, jolle

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{ja sarja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{hajaantuu.}$$

Määrää potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

suppenemisväli ja anna (perusteltu) esimerkki tällaisesta sarjasta.

Analyysi 3
Laskuryhmä 7, 25.10.2013

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Anna funktiolle $f(x) = 1/(2+x)$ potenssisarjaesitys pisteessä $x_0 = -1$. Mikä on kyseisen sarjan suppenemisväli?

22. Etsi funktion $f(x) = \cos^2 x$ Taylor-sarjaesitys origossa.

23. Etsi muotoa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olevat funktiot, jotka toteuttavat yhtälön

$$f(x) = -f''(x) \quad \text{kaikilla } x\,.$$

Mitä saat lisäehdolla $f(0) = 1 = f'(0)$?

24. Sanotaan, että funktio $f : I \to \mathbf{R}$ on *reaalianalyyttinen* välillä I, jos jokaisella x_0 on ympäristö $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, jolla f voidaan esittää suppenevana potenssisarjana. Jos f ja g ovat reaalianalyyttisiä välillä I ja jos on väli $I_0 \subset I$

$$f(x) = g(x) \quad \text{kaikilla } x \in I_0\,,$$

niin osoita, että

$$f(x) = g(x) \quad \text{kaikilla } x \in I\,.$$