Analyysi 3
Harjoitus 6, 22.10.2013

1. Tutki yli- ja aliharmonisten sarjojen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0,$$

suppenemista integraalitestin avulla.

2. Näytä, että

$$\frac{9}{8} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \le \frac{10}{8}.$$

3. Selitä kuinka vuorottelevan harmonisen sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

termien summausjärjestystä muuttamalla saadaan uusi sarja suppenemaan kohti lukua -19.

4. Millä x:n arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n^2}$$

suppenee?

5. Näytä, että sarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{nx}$$

määrittelee välillä $]0,1[$ jatkuvan funktion ja

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0\,.$$

6. Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,,$$

kun

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}\,, & \text{kun } n = k^2 \text{ jollakin } k \in \mathbf{N} \\ 0\,, & \text{muulloin?} \end{cases}$$

7. Jos jonolle (a_n) pätee $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, niin näytä, että sillä on osajono (a_{n_j}), jolle sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j}$$

suppenee itseisesti.

8. Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

(itseistä) suppenemista.

9. Kuinka monta termiä pitää sarjasta

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k^2+1} \quad \text{tai} \quad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

laskea yhteen, jotta summan tietää tarkkuudella 10^{-3}?

Analyysi 3
Laskuryhmä 6, 18.10.2013

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Olkoot $a_j \geq 0$ ja $p > 1$. Osoita, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^p \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right)^p .$$

22. Kuinka monta termiä pitää sarjoista

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{2^k} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{k!}$$

laskea yhteen, jotta summan tietää tarkkuudella 10^{-3}?

23. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{20k^2 - k - 1}{k^3 + k^2 + 33}$$

(itseisesti) vai hajaantuuko?

24. Näytä, että reaalinen raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = \gamma$$

on olemassa.[24]

25. Määrää (suppenevien) geometristen sarjojen

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j \quad \text{ja} \quad \sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

Cauchyn tulo. Onko se geometrinen sarja?

[21] Vihje: skaalaamalla voit olettaa, että $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$.

[24] Luku γ on nimeltään *Eulerin vakio*; ks. Wikipedia. Vihje: näytä jono väheneväksi.