Analyyysi 3
Harjoitus 5, 15.10.2013

1. Olkoot p_k sarjan $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ ei-negatiiviset termit ja n_k sen negatiiviset termit. Osoita, että $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee itseisesti, jos ja vain jos molemmat sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} n_k$ suppenevat.

2. Todista Lause 4.10 eli raja-arvoversio vertailutestistä sarjan suppenemiselle.

3. Tutki sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

suppenemista vertailu-, juuri- ja suhdetestien avulla.

4. Näytä, että kaikilla $N \in \mathbf{N}$

$$\log(N+1) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \log N\,.$$

5. Suppeneeko (itseisesti) vai hajaantuuko sarja:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3 - 18n^2 - 7}$?

6. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \log n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$?

7. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$?

8. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$?

Analyysi 3
Laskuryhmä 5, 11.10.2013

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2} \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \qquad \text{d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \ ?$$

22. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \ ?$$

23. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} \ ?$$

24. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}} \ ?$$

---

[23]Vihje: jos muu ei auta, käytä arviota

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \le n! \le \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$