Analyysi 3
Harjoitus 4, 8.10.2013

1. Määritellään

$$g(x) = \min\{|x-k| : k \in \mathbf{Z}\} \quad \text{ja } f_n(x) = 2^{-n} g(2^n x)\,.$$

Osoita, että jono f_n suppenee ja määrää rajafunktio. Hahmottele kuvaajia.

2. Osoita, että jono $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa[2] funktiota f ja esitä arvo $f(x)$ lukusarjana, kun

$$f_1(x) = \frac{g(10x)}{10} \quad \text{ja } f_{n+1} = f_n(x) + 10^{-(n+1)} g(10^{n+1}x)$$

ja g on kuten tehtävässä 1.

3. Anna esimerkki vähenevästä jonosta $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, joka suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, mutta jokainen f_n on epäjatkuva pisteessä $x = \frac{1}{2}$.

4. Jos $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jatkuvasti derivoituva, niin näytä, että erotusosamäärät

$$f_j(x) = \frac{f(x+\frac{1}{j}) - f(x)}{\frac{1}{j}}$$

suppenevat kohti derivaattaa $f'(x)$ tasaisesti jokaisella suljetulla välillä $[a,b] \subset \mathbf{R}$.

5. Näytä, että funktiojono

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(x^2+1)^k}$$

suppenee pisteittäin kohti funktiota $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Määrää f ja totea, ettei konvergenssi ole tasaista.

6. Mitä voit sanoa sarjan $\sum_{j=1}^{\infty}(a_j + b_j)$ suppenemisesta, jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee ja sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ hajaantuu?

7. Näytä, että sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)}$$

suppenee ja määrää sen summa.

8. Millä x:n arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sin x)^k (\cos x)^k$$

suppenee ja minne?

---

[2]Tämä funktio f ei derivoidu missään pisteessä.

[4]Vihje: muista, että jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$.

[7]Vihje: koita keksiä osasummille yksinkertainen lauseke. Osamurtokehitelmästä saattaa olla hyötyä.

Analyysi 3
Laskuryhmä 4, 4.10.2013

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin. Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. a) Olkoot $f_n, f : A \to \mathbf{R}$ funktioita. Näytä, että $f_n \to f$ joss sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$$

suppenee kohti lukua $f(x) - f_1(x)$ kaikilla $x \in A$.

b) Näytä, että funktiojono f_n suppenee tasaisesti A:ssa, jos

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < 2^{-n} \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

c) Suppeneeko f_n välttämättä tasaisesti A:ssa (kohti jotain funktiota), jos

$$f_{n+1} - f_n \to 0 \quad \text{tasaisesti } A\text{:ssa?}$$

22. Luennolla osoitettiin, että vuorotteleva harmoninen sarja

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

suppenee. Suppeneeko sarja

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k})\,?$$

23. a) Näytä, että sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{ ja } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$$

hajaantuvat.

b) Näytä, että on olemassa (aidosti) kasvavat kokonaislukujonot (p_j) ja (n_j), joille $p_0 = 0 = n_0$,

$$2 \le \sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} \frac{1}{2k-1} < 4 \text{ ja } \frac{1}{2} \le \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \frac{1}{2k} < 1.$$

c) Näytä, että sarja

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p_1 - 1} - \\
&- \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2n_1} + \\
&+ \frac{1}{2p_1 + 1} + \frac{1}{2p_1 + 3} + \cdots + \frac{1}{2p_2 - 1} - \\
&- \frac{1}{2n_1 + 2} - \frac{1}{2n_1 + 4} - \cdots - \frac{1}{2n_2} + \ldots
\end{aligned}$$

hajaantuu. Vrt. vuorotteleva harmoninen sarja.