Analyysi 3
Harjoitus 3, 1.10.2013

1. Näytä, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0\,.$$

2. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\,, & \text{jos } x > 0 \\ 0\,, & \text{jos } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Näytä, että f:llä on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat.

3. Olkoon $f(x) = e^x$. Kiinnitetään $a, b \in \mathbf{R}$. Näytä, että $T_{n,0}f \to f$ tasaisesti välillä $[a, b]$.

4. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$. Tutki funktiojonon $f_n : [0, \infty[\to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = xn^\alpha e^{-nx}$$

suppenemista. Suppeneeko pisteittäin tai tasaisesti? Mikä on rajafunktio, jos sellaista on?

5. Tutki funktiojonon $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

suppenemista. Suppeneeko pisteittäin tai tasaisesti? Mikä on rajafunktio, jos sellaista on?

6. Anna esimerkki jatkuvista funktioista $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$, joilla $f_n \to f$ pisteittäin, mutta

$$\int_0^1 f_n(x)dx \not\to \int_0^1 f(x)dx\,.$$

7. Olkoot f_n, f välillä $[a, b]$ määriteltyjä reaaliarvoisia funktioita. Osoita, että $f_n \to f$ tasaisesti välillä $[a, b]$ joss on olemassa reaalilukujono $x_n \to 0$, jolle (kunhan $n \geq N$)

$$f(x) - x_n \leq f_n(x) \leq f(x) + x_n \qquad \text{kaikilla } x \in [a, b], .$$

8. Suppeneeko funktiojono (f_n) pisteittäin tai tasaisesti välillä $[0, 1]$, kun

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}\,?$$

9. Määritellään $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}\,, & \text{kun } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ |x|\,, & \text{kun } |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Näytä, että funktiot f_n ovat derivoituvia ja ne suppenevat tasaisesti kohti funktiota, joka ei ole kaikkialla derivoituva, vaikka jono f_n' suppenee pisteittäin. Hahmottele kuvaajia.

---

[4] Vihje: tutki funktion f_n maksimia.

Analyysi 3
Laskuryhmä 3, 26.9.2013

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Tutki funktiojonojen $f_n, g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = |x^2 - (x - \frac{1}{n})^2| \quad \text{ja } g_n(x) = nf_n(x),$$

suppenemista. Suppeneeko pisteittäin tai tasaisesti (välillä $[a, b]$ tai $\mathbf{R}$:ssä)? Mikä on rajafunktio, jos sellaista on?

22. Olkoot f_n jono jatkuvia funktioita, jotka suppenevat tasaisesti kohti funktiota f. Osoita: jos $x_n \to x_0$, niin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0).$$

23. Olkoon $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ jono jatkuvia funktioita, joka suppenee tasaisesti avoimella välillä $]0, 1[$. Osoita, että

a) f_n suppenee pisteittäin suljetulla välillä $[0, 1]$.

b) f_n suppenee tasaisesti suljetulla välillä $[0, 1]$.

24. Olkoon $f(x) = \sin x$. Kiinnitetään $a, b \in \mathbf{R}$. Näytä, että $T_{n,0}f \to f$ tasaisesti välillä $[a, b]$.

25. Suppeneeko funktiojono (f_n) pisteittäin tai tasaisesti välillä $[0, 1]$, kun

$$f_n(x) = n^2x^3e^{-nx^2}\ ?$$

26. Anna esimerkki nousevasta jonosta jatkuvia funktioita f_n, joka suppenee pisteittäin kohti funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ -1\,, & \text{kun } x \notin]0, 1[. \end{cases}$$

Voiko suppeneminen olla tasaista?