Analyysi 3
Harjoitus 2, 24.9.2013

1. Määrää arkustangentin Taylorin kehitelmä (nollassa) vastaavalla tavalla kuin luentomonisteessa määrättiin logaritmin kehitelmä (perustele kaikki väitteet huolellisesti):

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n-1}(x),$$

missä jäännöstermille on voimassa

$$|R_{2n-1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. Koska $\pi/4 = \arctan 1$, voi arkustangentin Taylor-kehitelmää käyttää π:n likiarvon laskemiseksi. Kuinka monta termiä pitäisi laskea, jotta voisit tehtävän 1 virhearvion valossa olla varma tarkkuudesta 10^{-4}?

3. Kuinka monta termiä Taylor kehitelmässä pitäisi laskea[3] luvun $\arctan \frac{1}{5}$ määräämiseksi vähintään tarkkuudella 10^{-8}? Laske se arvo.

4. Todista luentomonisteen lause 2.8: *Olkoon funktio f n kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $]a,b[$ ja $x_0 \in]a,b[$. Jos*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(x_0) > 0\,,$$

niin f:llä on lokaali minimi pisteessä x_0, jos $n \ge 2$ on parillinen. Piste x_0 ei ole f:n ääriarvokohta jos n on pariton.

5. Neperin lukua määriteltäessä saadaan helposti arvio $1 \le e \le 4$. Osoita, että

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)\,,$$

missä

$$0 < R_n(x) \le \frac{4^x x^{n+1}}{(n+1)!}\,, \text{ kun } x \ge 0.$$

Osoita tämän avulla edelleen, että

$$2 < e < 3\,.$$

6. Anna integraalille

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

arvio vähintään tarkkuudella 10^{-4}.

---

[3] Käyttämällä kaavaa

$$\arctan 1 = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\,,$$

joka seuraa helposti summakaavasta

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}\,,$$

saisit nopeasti arvion $\pi \approx 3,14159$.

7. Määrää raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{(e^{x^3}-1)\sin x}\,.$$

8. Määrää origossa funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

neljäs Taylorin polynomi $T_{4,0}f(x)$.

Analyysi 3
Laskuryhmä 2, 20.9.2013

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Käytä demotehtävän 5 arviota e:lle ja osoita sen avulla eksponenttifunktion jäännöstermiarvio:

$$0 < R_n(x) \leq \frac{3^x x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ kun } x \geq 0.$$

Näytä edelleen, että mikäli laskisit eksponenttifunktion 7. Taylorin polynomin, saisit Neperin luvun tarkkuudella 10^{-3} ($e \approx 2,718$).

22. Etsi funktioiden

a)

$$f(x) = \frac{1}{1+x},$$

b)

$$g(x) = e^{x^2}$$

c)

$$h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Taylorin polynomit origossa.

23. Anna integraalille

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$$

arvio vähintään tarkkuudella 10^{-4} (summalauseke kelpaa).

24. Yhtälöllä

$$x^2 = \cos x$$

on täsmälleen 2 ratkaisua (miksi?). Kuinka lähellä ratkaisuja ovat luvut $\pm\sqrt{2/3}$?