Analyysi 3
Harjoitus 1, 17.9.2013

1. Olkoon p polynomi
$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
ja $x_0 \in \mathbf{R}$. Esitä $p(x)$ muuttujan $(x - x_0)$ polynomina, ts. määrää luvut b_j ja k siten, että
$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} b_j (x - x_0)^j \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}\,.$$

2. Laske funktion $p(x) = x^5$ Taylorin polynomit pisteessä $x_0 = 3$. Kuinka paljon approksimantit $T_{k,3}p(3 + 10^{-n})$ poikkeavat oikeasta arvosta $p(3 + 10^{-n})$, kun $k = 3$ tai $k = 4$?

3. Olkoot p ja q korkeintaan n. asteen polynomeja, joille jollakin x_0 pätee
$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x) - q(x)}{|x - x_0|^n} = 0\,.$$
Osoita, että $p(x) = q(x)$ kaikilla x.

4. Laske seuraava raja-arvo käyttämällä toisia Taylorin polynomeja:
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x}.$$
(Kuinka käy, jos käytät vain ensimmäisiä Taylor-polynomeja?)

5. Laske seuraava raja-arvo käyttämällä sopivia Taylorin polynomeja:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + e^x - 2 - x - \frac{x^3}{6}}{x^2 \log(1 + x^2)}.$$
Kuinka käy, jos käytät vain ensimmäisiä/toisia/kolmansia Taylor-polynomeja?

6. Olkoon $n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Todista *binomikaava*
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \text{ missä } \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$
laskemalla funktion $(1 + x)^n$ n. Taylorin polynomin pisteessä $x_0 = 0$.

7. Olkoot f ja g n kertaa jatkuvasti derivoituvia pisteen x_0 ympäristössä. Osoita Taylorin kaavan avulla, että
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)},$$
mikäli
$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = g^{(n-1)}(x_0) = 0$$
ja $g^{(n)}(x_0) \neq 0$.

---

[5] Vihje: $\log(1 + t) = t - t^2/2 + t^3/3 + o(t^3)$.

[6] Vihje: palauta yleinen kaava tapaukseen kun $a = 1$.

8. Olkoot f kolmesti jatkuvasti derivoituva. Näytä osittaisintegroimalla, että

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2\,dt\,.$$

[8]Vihje: käytä ensin osittaisintegrointikaavassa (Kuinka todistetaan? Tarkista oletukset!)

$$\int_a^b Fg'\,dx = \Big/_a^b F(x)g(x) - \int_a^b F'g\,dx$$

funktioita $g(t) = x - t$ ja $F = f'$. Taylorin lause seuraisi induktiolla.

Analyysi 3
Laskuryhmä 1, 13.9.2013

Laskuryhmätehtäviä ei käsitellä harjoituksissa eikä niitä lasketa harjoitushyvityksiin.

Demotehtävien lisäksi/sijasta voi laskeskella esim seuraavia tehtäviä:

21. Etsi Taylorin polynomit $T_{x_0,n}f$, kun

a) $n = 3$, $x_0 = 0$ ja $f(x) = e^{e^x}$.
b) $n = 3$, $x_0 = 0$ ja $f(x) = e^{\sin x}$.
c) $n = 2k$, $x_0 = \pi/2$ ja $f(x) = \sin x$.
d) $x_0 = 2$ ja $f(x) = \log x$
e) $n = 4$, $x_0 = 0$ ja $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
f) $n = 4$, $x_0 = 1$ ja $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
g) $x_0 = 0$ ja

$$f(x) = \frac{1}{1+x}\,.$$

h) $n = 2k$, $x_0 = 0$ ja

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

22. Kirjoita seuraavat polynomit muuttujan $(x - 2)$ polynomeina:

a) $ax^2 + bx + c$.
b) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$.
c) x^5.