ANALYYSI 3

Tero Kilpeläinen

Luentomuistiinpanoja syksyltä 2005
14. helmikuuta 2014

Sisältö

Teksti sisältää muistiinpanoja syksyllä 2005. Tämän paketin tarkoitus on tukea omien muistiinpanojen tekoa, ei korvata niitä. Matematiikkaa oppii parhaiten itse kirjoittaen ja ongelmia ratkoen.

1. Esitietoja

Muistellaan Analyysi 1 ja 2 -kurssien tärkeitä määritelmiä ja tuloksia: Funktio $f : I \to \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$, on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in I$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,, \text{ kun } |x - x_0| < \delta \quad (x, x_0 \in I).$$

Edelleen $f : I \to \mathbf{R}$ on *jatkuva välillä* I, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$.

Jatkuvuus voidaaan karakterisoida myös raja-arvojen avulla: muista, että luku $a \in \mathbf{R}$ on funktion f *raja-arvo* pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Nyt pätee lause: *Tällöin f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain, jos f:llä on raja-arvo $f(x_0)$ pisteessä x_0, ts.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

1.1. Riemann-integraali

Integrointi ja differentiointi (derivointi) ovat kaksi analyysin keskeisintä rajaprosessia. Analyysin peruslause ilmaisee, että derivointi ja integrointi ovat toistensa käänteisprosesseja.

Olkoon I rajoitettu väli, jonka päätepisteet ovat $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Välin I *jaon* muodostavat luvut (äärellisen monta)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\,.$$

Funktio $g : I \to \mathbf{R}$ on *porrasfunktio*, jos on olemassa välin I jako

$$P = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ja luvut $a_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, joille

$$g(x) = a_j \text{ kaikilla } x \in]x_{j-1}, x_j[.$$

Porrasfunktion $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *integraali* (yli välin $[a, b]$) on

$$\int_a^b g := \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j - x_{j-1}),$$

missä $P = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on välin $[a, b]$ jako siten, että

$$g(x) = a_j \text{ kaikilla } x \in I_j =]x_{j-1}, x_j[\,.$$

Rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on *(Riemann-)integroituva*, jos

$$\text{ala} \int_a^b f = \text{ylä} \int_a^b f\,.$$

Tällöin f:n *(Riemann-)integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := \text{ala} \int_a^b f = \text{ylä} \int_a^b f\,.$$

Tässä

$$\text{ala} \int_a^b f := \sup\{\int_a^b g \ : g \text{ porrasfunktio ja } g \le f \text{ välillä } [a, b]\}$$

ja f:n *yläintegraali* yli välin $[a, b]$

$$\text{ylä} \int_a^b f := \inf\{\int_a^b h \ : g \text{ porrasfunktio ja } h \ge f \text{ välillä } [a, b]\}.$$

Jatkuvat funktiot ovat integroituvia. Riemannin ehto antaa erään keinon tarkastella integroituvuutta: (Analyysi 2, Lause 1.1)

1.1. Lause. (Riemannin ehto) *Rajoitettu funktio $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ on Riemann-integroituva, välillä $[a,b]$, jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa porrasfunktiot g ja h siten, että*

$$g \le f \le h \text{ välillä } [a,b]$$

ja

$$\int_a^b h\,dx - \int_a^b g\,dx < \varepsilon\,.$$

Jatkuva funktio saa keskiarvonsa välillä $[a,b]$ (Analyysi 2, Lause 1.14):

1.2. Lause. (Integraalilaskennan väliarvolause (IVAL)) *Olkoon f jatkuva välillä $[a,b]$. Tällöin on olemassa $\xi \in [a,b]$, jolle*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,.$$

Tarvitsemme tästä myös yleistetyn version (Analyysi 2, Lause 1.16):

1.3. Lause. (Yleistetty integraalilaskennan väliarvolause) *Olkoon f jatkuva ja p ei-negatiivinen, Riemann-integroituva välillä $[a,b]$. Tällöin on olemassa $\xi \in [a,b]$, jolle*

$$\int_a^b fp\,dx = f(\xi)\int_a^b p\,dx\,.$$

1.2. Derivaatta

Olkoon $f\ ]a,b[\to \mathbf{R}$ ja $x\ \in]a,b[$. Sanotaan, että f on *derivoituva ja $f'(x)$ f:n derivaatta pisteeessä x*, jos raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

on olemassa (ja reaaliluku!).

Edelleen, jos f on derivoituva välillä $]a,b[$, niin sen derivaatta f' määrittelee myös funktion $f'\ ]a,b[\to \mathbf{R}$: mikäli derivaattafunktio f' on derivoituva, niin f on *kahdesti derivoituva* ja f:n *toinen derivaatta* on

$$f''(x) = (f')'(x)\,.$$

Jatkamalla näin, f:n *kolmas derivaatta* $f''' = f^{(3)}$ on f:n toisen derivaatan f'' derivaatta, mikäli sellainen on olemassa jne.

Seuraava väliarvolause (Analyysi 2, lause 2.7) on alkeisdifferentiaalilaskennan ehkä tärkein ja hyödyllisin lause.

1.4. Lause. (Väliarvolause, VAL) *Olkoon f $[a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a,b[$. Tällöin on olemassa $\xi \in]a,b[$ siten, että*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Tarvitsemme jatkossa myös sen yleistettyä muotoa (Analyysi 2, lause 2.13):

1.5. Lause. (Yleistetty väliarvolause) *Olkoon f ja g jatkuvia suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituvia avoimella välillä $]a,b[$. Jos*

$$g'(x) \neq 0 \text{ kaikilla } x \in]a,b[\,,$$

niin on olemassa $\xi \in]a,b[$ siten, että

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

1.3. Analyysin peruslause

Analyysin peruslause sitoo integroinnin ja derivoinnin toisiinsa (ks Analyysi 2, luku 3):

1.6. Lause. (Analyysin peruslause) *Olkoon $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituva ja $x_0 \in]a,b[$. Tällöin*

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \;\text{ kaikilla } x \in]a,b[\,.$$

Kääntäen, jos g on jatkuva funktio välillä $[a,b]$ ja $x_0 \in [a,b]$, niin integraalifunktio

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\,,$$

on jatkuvasti derivoituva välillä $]a,b[$ ja $G'(x) = g(x)$ kaikilla $x \in]a,b[$.

2. Taylor-polynomit

2.1. Taylorin lause

Analyysi 1 -kurssilla opittiin, että jos funktio f on jatkuva pisteesä x_0, niin sen käyttäytymistä voidaan (lähellä pistettä x_0) approksimoida vakiofunktiolla ($y = f(x_0)$), sillä

$$f(x) - f(x_0) = o(1) = o(|x - x_0|^0) \quad \text{kun } x \to x_0\,,$$

toisin sanoen[1]

$$f(x) = f(x_0) + \epsilon(x)\,,$$

missä

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\epsilon(x)}{|x - x_0|^0} = \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0\,.$$

Vakiopolynomi $p_0(x) = f(x_0)$ on siis jatkuvan funktion f paras approksimointi 0. asteen polynomilla pisteen x_0 lähistöllä.

Jos f on hieman sileämpi, approksimointikin sujuu paremmin: olkoon f derivoituva pisteessä x_0. Tällöin (yhtäpitävästi)

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = o(|x - x_0|) \quad \text{kun } x \to x_0\,,$$

toisin sanoen derivoituvaa funktiota voidaan approksimoida pisteen x_0 ympäristössä affiinilla funktiolla eli ensimmäisen asteen polynomilla niin, että virhetermi on pienempi kuin lineaarinen. Siten tämä polynomi

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

---

[1] Muista: ”pikku-o” ja ”iso-O”merkinnät (Analyysi 2):

$$f(x) = o(g(x))\,, \text{ kun } x \to x_0\,,$$

mikä tarkoittaa, että

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,,$$

ja

$$f(x) = O(g(x))\,, \text{ kun } x \to x_0\,,$$

mikä tarkoittaa, että on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|f(x)| \le C|g(x)|\,,$$

kunhan x on tarpeeksi lähellä pistettä x_0.

antaa ensimmäiseen asteen polynomeista parhaan approksimoinnin f:lle pisteen x_0 lähellä.

Nyt voisi arvata, että kahdesti derivoituvaa funktioita voisi approksimoida toisen asteen polynomilla niin, että virhetermi olisi muotoa $o((x-x_0)^2)$. Lasketaan tämä ensin 2. asteen polynomille:

$$p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\,,$$

jolloin

$$\begin{aligned} p_2(x) - p_2(x_0) &= a_2(x^2 - x_0^2) + a_1(x - x_0) \\ &= a_2(x-x_0)^2 + 2a_2x_0(x-x_0) + a_1(x-x_0) \\ &= \frac{1}{2}p_2''(x_0)(x-x_0)^2 + p_2'(x_0)(x-x_0)\,. \end{aligned}$$

Tämän opastamana arvaamme, että kahdesti derivoituvaa funktiota f voidaan parhaiten approksimoida polynomilla

$$q_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\,.$$

Näin onkin asian laita:

2.1. Lause. *Olkoon funktiolla f jatkuva toinen derivaatta f'' välillä $]a,b[$. Jos $x_0 \in]a,b[$ ja*

$$q_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\,,$$

niin

$$f(x) - q_2(x) = o(|x-x_0|^2)\,, \qquad \text{kun } x \to x_0\,,$$

ts. kaikilla $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$, jolle

$$|f(x) - q_2(x)| \le \varepsilon |x-x_0|^2\,, \qquad \text{kun } |x-x_0| < \delta\,.$$

Todistus: Olkoon $F = f - q_2$. Tällöin F:llä on jatkuva toinen derivaatta ja

$$F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = 0\,.$$

Väite todistetaan soveltamalla väliarvolausetta 1.4 kahdesti: Ensiksi, löydetään sellainen piste x_1 pisteiden x_0 ja x välistä, jolle

$$F(x) = F(x) - F(x_0) = F'(x_1)(x-x_0)$$

ja edelleen piste x_2 pisteiden x_0 ja x_1 välistä, jolle

$$F'(x_1) = F'(x_1) - F'(x_0) = F''(x_2)(x_1 - x_0)\,.$$

Siten yhdistämällä nämä

$$|F(x)| = |F''(x_2)(x_1 - x_0)(x - x_0)| \le |F''(x_2)|(x - x_0)^2\,.$$

Koska F'' on jatkuva ja $F''(x_0) = 0$, on jokaista $\varepsilon > 0$ kohden sellainen $\delta > 0$, jolle

$$|F''(x)| < \varepsilon$$

kaikilla x, joille $|x - x_0| < \delta$. Koska piste x_2 pisteiden x_0 ja x välissä, saadaan tästä

$$|f(x) - g_2(x)| = |F(x)| \le |F''(x_2)|(x - x_0)^2 \le \varepsilon(x - x_0)^2$$

kaikilla x, joille $|x - x_0| < \delta$. □

Seuraavaksi havaitsemme, että n. asteen polynomille

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

pätee

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}p''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,. \tag{2.1}$$

Tämän toteamiseksi kirjoitetaan ($x = x_0 + h$ ja)

$$p(x_0 + h) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x_0 + h)^j = \sum_{j=0}^{n} b_j h^j\,,$$

jolloin $b_0 = p(x_0)$. Muut kertoimet b_j saadaan laskemalla eo. lausekkeen derivaatat h:n suhteen pisteessä $h = 0$: ensiksi

$$p'(x_0 + h) = \sum_{j=1}^{n} j b_j h^{j-1}\,,$$

mistä

$$p'(x_0) = b_1\,.$$

Laskemalla samoin kaikki n derivaattaa samoin päädytään kaavaan (2.1).

Jos f on n kertaa derivoituva, niin kaavan (2.1) oikean puolen polynomi voidaan muodostaa (kun p korvataan f:llä). Sitä kutsutaan f:n Taylorin polynomiksi:

2.2. Määritelmä. Olkoon f n kertaa derivoituva välillä $]a,b[$. Funktion f n. *Taylorin polynomi* pisteessä $x_0 \in]a,b[$ on

$$T_{n,x_0}f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,.$$

Kaavan (2.1) mukaan korkeintaan n. asteen polynomille p pätee:

$$T_{n,x_0}p(x) = p(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}\,.$$

Yleiselle funktiolle f sen Taylorin polynomi on tietysti eri kuin funktio itse. Funktiota $R_{n,x_0}f$, joka ilmaisee kuinka paljon n. Taylorin polynomi eroaa f:stä sanotaan f:n n. *jäännöstermiksi*. Siis

$$R_{n,x_0}f(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x)\,.$$

Seuraava Taylorin lause kertoo, että jäännöstermi on varsin pieni sileälle funktiolle:

2.3. Lause. (Taylorin lause/kaava) *Olkoon funktio f n kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $]a,b[$ ja $x_0 \in]a,b[$. Tällöin*

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x) \text{ kaikilla } x \in]a,b[\,,$$

missä

$$R_{n,x_0}f(x) = o(|x-x_0|^n)\,, \text{ kun } x \to x_0\,.$$

Todistus: (vrt Lauseen 2.1 todistus.) Osoitetaan väliarvolauseen avulla, että

$$R_{n,x_0}(x) = R_{n,x_0}f(x) = o(|x-x_0|^n)\,, \text{ kun } x \to x_0\,.$$

Ensiksi havaitaan, että

$$R_{n,x_0}(x_0) = R'_{n,x_0}(x_0) = R''_{n,x_0}(x_0) = \cdots = R^{(n)}_{n,x_0}(x_0) = 0\,,$$

jolloin soveltamalla väliarvolausetta jäännöstermiin ja sen derivaattoihin löydetään pisteet $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pisteiden x ja x_0 välistä, joille

$$\begin{aligned} R_{n,x_0}(x) &= R'_{n,x_0}(x_1)(x-x_0) \\ R'_{n,x_0}(x_1) &= R''_{n,x_0}(x_2)(x_1-x_0) \\ &\cdots \\ R^{(n-1)}_{n,x_0}(x_{n-1}) &= R^{(n)}_{n,x_0}(x_n)(x_{n-1}-x_0)\,. \end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä saadaan

$$R_{n,x_0}(x) = R^{(n)}_{n,x_0}(x_n)(x-x_0)(x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots(x_{n-1}-x_0)\,,$$

josta

$$|R_{n,x_0}(x)| \le |R^{(n)}_{n,x_0}(x_n)||x-x_0|^n\,,$$

joten väite seuraa, koska jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{x\to x_0} |R^{(n)}_{n,x_0}(x_n)| = \lim_{y\to x_0} |R^{(n)}_{n,x_0}(y)| = |R^{(n)}_{n,x_0}(x_0)| = 0\,.$$

□

Esimerkki. Eksponenttifunktion Taylor-approksimointi origossa on

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)\,,$$

missä $\epsilon(x) \to 0$. Samalla tavalla saadaan suoraan derivoimalla, että

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2k+1}\epsilon_{2k+1}(x)\,,$$

missä $\epsilon_{2k+1}(x) \to 0$ ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2k}\epsilon_{2k}(x)\,,$$

missä $\epsilon_{2k}(x) \to 0$.

Näiden avulla voidaan laskea esimerkiksi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon_3(x) - x}{x(1-\frac{x^2}{2!} + x^2\epsilon_2(x) - 1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon_3(x)}{-\frac{x^3}{2!} + x^3\epsilon_2(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!} + \epsilon_3(x)}{-\frac{1}{2!} + \epsilon_2(x)} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

Huomaa, että Taylorin lause kertoo, että n. Taylorin polynomi approksimoi funktiota hyvin pisteen x_0 lähellä, muttei mitään siitä, mitä tapahtuu kauempana. Huomaa myös, että Taylorin polynomit voivat muuttua paljonkin, kun pistettä x_0 muutetaan. Myöhemmin tutkimme lähemmin, miten funktiota voidaan approksimoida pisteittäin tai globaalimmin.

Taylorin polynomi voidaan aina laskea derivoimalla f riittävän monta kertaa. Tämä on kuitenkin usein kohtuuttoman työlästä. Siksi on hyvä havaita seuraava yksikäsitteisyystulos:

2.4. Lause. *Olkoon f n kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $]a,b[$ ja $x_0 \in]a,b[$. Jos p on n. asteen polynomi, jolle*

$$f(x) - p(x) = o(|x - x_0|^n)\,,\ \textit{kun } x \to x_0\,,$$

niin

$$p(x) = T_{n,x_0} f(x) \ \textit{kaikilla } x\,.$$

Todistus: Koska Taylorin lauseen 2.3 mukaan

$$f(x) - p(x) = o(|x - x_0|^n) \quad \text{ja} \quad f(x) - T_{n,x_0} f(x) = o(|x - x_0|^n)$$

niin

$$\frac{p(x) - T_{n,x_0} f(x)}{|x - x_0|^n} \to 0\,,\ \text{kun } x \to x_0\,.$$

Siten kirjoittamalla

$$p(x) - T_{n,x_0} f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j$$

ja antamalla $x \to x_0$ nähdään, että $a_0 = 0$ ja edelleeen $a_1 = 0$, $a_2 = 0 \ldots$ ja $a_n = 0$. □

Edelläolevan yksikäsitteisyyslauseen (eräs) hyöty on se, että riittää löytää millä tahansa keinolla tai konstilla n. asteen polynomi p, jolle $f(x) - p(x) = o(|x - x_0|^n)$, sillä tämän polynomin täytyy olla f:n n. Taylorin polynomi. Esimerkiksi kahden funktion f ja g Taylorin polynomien tulosta saadaan tulofunktiolle fg Taylorin polynomi, kun tulopolynomista otetaan mukaan vain termit joiden aste on korkeintaan n (sillä korkeammille potensseille $k > n$ pätee $|x - x_0|^k = o(|x - x_0|^n)$). Hetken päästä muitakin esimerkkejä.

Esimerkki. (Geometrinen sarja)
Olkoon

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

n termin geometrinen summa. Induktiolla todetaan, että

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q},$$

kunhan $q \neq 1$ (jos $q = 1$ on $S_n = n$).

Tarkastellaan nyt funktiota $g :]-\infty, 1[\to \mathbf{R}$,

$$g(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Nyt ylläolevasta geometrisestä sarjasta saamme (kaikilla $n \in \mathbf{N}$)

$$g(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} + \frac{t^n}{1-t},$$

josta integroimalla ($x < 1$)

$$\begin{aligned}
-\log(1-x) &= \int_0^x \frac{dt}{1-t} \\
&= \int_0^x (1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})\, dt + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} - R_n(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} - R_n(x),
\end{aligned}$$

missä

$$R_n(x) = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Nyt

$$|R_n(x)| \leq \begin{cases} \left| \int_0^x t^n dt \right| = \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}, & \text{kun } x \leq 0, \\ \left| \dfrac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt \right| = \dfrac{|x|^{n+1}}{(1-x)(n+1)}, & \text{kun } x \in [0,1[, \end{cases}$$

Siten kaikilla $x \in [-1, 1[$

$$f(x) = \log(1-x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} + R_n(x)\,,$$

missä $R_n(x) \to 0$, kun $n \to \infty$. Koska lisäksi

$$R_n(x) = o(|x - x_0|^n)\,, \qquad \text{kun } x \to 0\,,$$

on Taylorin polynomin yksikäsitteisyystuloksen 2.4 nojalla funktion

$$f(x) = \log(1-x)$$

n. Taylorin polynomi nollassa

$$T_{n,x_0} f(x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j}\,.$$

Huomaa, että yo. laskun avulla saamme

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\,,$$

minkä tarkka merkitys selviää myöhemmin sarjoja käsittelevässä luvussa 4.

2.2. Jäännöstermin lauseke ja arvioita

Taylorin kaavan sovellutuksissa on usein tarpeen tietää enemmän jäännöstermistä kuin, mitä lauseesta 2.3 käy ilmi. Ensin todistamme sille tarkan *integraalimuodon*:

2.5. Lause. (Taylorin kaava, integroitu muoto) *Olkoon funktio f $n+1$ kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $]a, b[$ ja $x_0 \in]a, b[$. Tällöin*

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x) \text{ kaikilla } x \in]a, b[\,,$$

missä jäännöstermi on

$$R_{n,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$$

Todistus: Tämä voidaan todistaa myös suoraan osittaisintegroimalla ja induktiolla, mikä tehtäneen harjoituksissa. Seuraavassa todistuksessa käytetään Lauseen 2.3 kaavaa: kaikilla $x, y \in]a, b[$

$$\begin{aligned} R_{n,y}f(x) &= f(x) - T_{n,y}f(x) \\ &= f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) - \frac{1}{2}f''(y)(x-y)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n\,, \end{aligned}$$

mistä laskemalla derivaatta y:n suhteen saadaan tulon derivoimissäännön avulla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}R_{n,y}f(x) =& 0 - f'(y) - (f''(y)(x-y) - f'(y)) \\ & - (\frac{1}{2}f'''(y)(x-y)^2 - f''(y)(x-y)) - \dots \\ & \cdots - (\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}) \\ =& -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n\,, \end{aligned}$$

koska summassa joka toinen termi kumoaa toisensa. Koska $R_{n,x}f(x) = 0$, saadaan analyysin peruslauseen nojalla

$$\begin{aligned} R_{n,x_0}f(x) &= R_{n,x_0}f(x) - R_{n,x}f(x) \\ &= \int_x^{x_0} \frac{d}{dy}R_{n,y}f(x)\,dy = -\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dy}R_{n,y}f(x)\,dy \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n\,dy\,, \end{aligned}$$

ja väite on todistettu. □

Integraalilaskennan väliarvolauseesta 1.2 saadaan seuraava arvio jäännöstermille:

2.6. Lause. (Cauchyn muoto jäännöstermille) *Olkoon funktio f $n+1$ kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $]a, b[$ ja $x_0 \in]a, b[$. Taylorin polynomin n. jäännöstermille pätee: kaikilla $x \in]a, b[$ on olemassa ξ pisteiden x ja x_0 välissä, jolle*

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)\,.$$

Todistus: Seuraa suoraan jäännöstermin integraalimuodosta ja integraalilaskennan väliarvolauseesta 1.2 sillä

$$\begin{aligned} R_{n,x_0}f(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)\,, \end{aligned}$$

missä ξ on eräs piste pisteiden x ja x_0 välissä. □

Yleistetystä integraalilaskennan väliarvolauseesta 1.3 saadaan seuraava arvio jäännöstermille:

2.7. Lause. (Lagrangen muoto jäännöstermille) *Olkoon funktio f $n+1$ kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $]a,b[$ ja $x_0 \in]a,b[$. Taylorin polynomin n. jäännöstermille pätee: kaikilla $x \in]a,b[$ on olemassa ξ pisteiden x ja x_0 välissä, jolle*

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Todistus: Seuraa suoraan jäännöstermin integraalimuodosta ja yleistetystä integraalilaskennan väliarvolauseesta 1.3 sillä

$$\begin{aligned} R_{n,x_0}f(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\,, \end{aligned}$$

missä ξ on eräs piste pisteiden x ja x_0 välissä. □

Seuraavassa eräs esimerkki Taylorin kaavan sovellutuksesta:

2.8. Lause. *Olkoon funktio f n kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $]a,b[$ ja $x_0 \in]a,b[$. Jos*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(x_0) > 0\,,$$

niin f:llä on lokaali minimi pisteessä x_0, jos $n \geq 2$ on parillinen. Piste x_0 ei ole f:n ääriarvokohta jos n on pariton.

TODISTUS: Seuraa Taylorin kaavasta. Yksityiskohdat: HT. $\square$

3. Funktiojonot

Muistetaan Analyysi 1 -kurssilta suppenevan pistejonon määritelmä:

3.1. Määritelmä. Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ jono reaalilukuja. Sanotaan, että jono (x_n) *suppenee* kohti reaalilukua a, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(\varepsilon, \text{jono}) \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin a on jonon (x_n) *raja-arvo* ja sitä merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{tai } x_n \to a \text{ kun } n \to \infty.$$

Esimerkki. Olkoon $x \in [0, 1]$. Tällöin jono (x^n) suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } 0 \leq x < 1\,, \\ 1\,, & \text{jos } x = 1\,, \end{cases}$$

Jos $x = 0$ tai $x = 1$, on asia selvä. Jos $0 < x < 1$, tämä nähdään esimerkiksi Bernoullin epäyhtälön[2] avulla

$$|x^n| = \left(\frac{1}{1 + (\frac{1}{x} - 1)}\right)^n \leq \frac{1}{1 + n(\frac{1}{x} - 1)} \leq \frac{x}{n(1-x)} \to 0\,.$$

Koska Bernoullin epäyhtälöstä seuraa, että

$$x^n = (1 - (1-x))^n \geq 1 - n(1-x) \geq \frac{1}{2}\,, \text{ kun } 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1\,,$$

huomataan, että jonon suppenemisvauhti *riippuu pisteestä* x, ts. se kohta (indeksi n), mistä jonon loppuosa on annettua lukua ε lähempänä raja-arvoa, riippuu x:n arvosta. Jono voidaan myös kirjoittaa funktioiden avulla: $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = x^n\,, \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Tällöin jonoa (f_n) kutsutaan funktiojonoksi.

[2]**Bernoullin epäyhtälö:** jos $y > -1$, niin $(1 + y)^n \geq 1 + ny$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Jos $A \subset \mathbf{R}$ ja $f_n : A \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, ovat funktioita, niin

$$(f_n)_n = (f_n)_{n\in\mathbf{N}} = (f_n) = f_1, f_2, f_3, \ldots ,$$

on *funktiojono*. Funktiojono (f_n) tuottaa jokaisella $x \in A$ lukujonon $(f_n(x))$. Sanotaan, että *funktiojono* (f_n) *suppenee (pisteittäin) joukossa* A, jos lukujonot $(f_n(x))$ suppenevat jokaisella $x \in A$, ts. jokaisella $x \in A$ on olemassa reaaliluku $f(x)$, jolle

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) .$$

Nämä raja-arvot $f(x)$ määrittelevät uuden funktion $f : A \to \mathbf{R}$ ja sanotaan, että *funktiojono* (f_n) *suppenee (pisteittäin) kohti funktiota* f, tätä merkitään $f_n \to f$ tai

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f .$$

Huomaa, että suppenemisvauhti $f_n(x) \to f(x)$ riippuu yleensä pisteestä x, vrt. esimerkki edellä.

Edelläolevan määritelmän mukaan siis funktiojono f_n suppenee pisteittäin (joukossa A) kohti funktiota f, jos jokaisella x ja jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(x, \varepsilon, \text{jono}) \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Lukujono suppenee, jos se täyttää *Cauchyn kriteerion*; funktiojonolle tämä kertoo seuraavaa: funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin joukossa A (kohti jotain funktiota $f : A \to \mathbf{R}$), jos jokaisella x ja jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(x, \varepsilon, \text{jono}) \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n, m \geq N.$$

Pisteittäisessä suppenemisessa jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on luku N, jota suuremmille indekseillä jonon funktioiden arvot pisteessä x poikkeavat rajafunktion arvosta pisteessä x vähemmän kuin ε. Se kuinka suuri luvun N tulee olla, riipuu yleensä pisteestä x.

Esimerkki. Olkoon $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) , & \text{jos } x \in [n, 2n] \\ 0 , & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Tällöin f_n on jono jatkuvia funktioita $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $f_n \to 0$, koska kiinteällä x $f_n(x) = 0$ kunhan $n > x$. Siten valitsemalla $N > x$ ($N \in \mathbf{N}$) saamme (kaikilla $\varepsilon > 0$)

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon\,, \qquad \text{kunhan } n \geq N.$$

Kuitenkaan lukua N ei voida valita pisteestä x riippumattomaksi (mikäli $\varepsilon < 1$) koska kaikilla n pätee

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(n + \frac{1}{2})| = 1 > \varepsilon\,.$$

Seuraavassa määritellään pisteittäistä konvergenssia vahvempi konvergenssin käsite funktiojonoille:

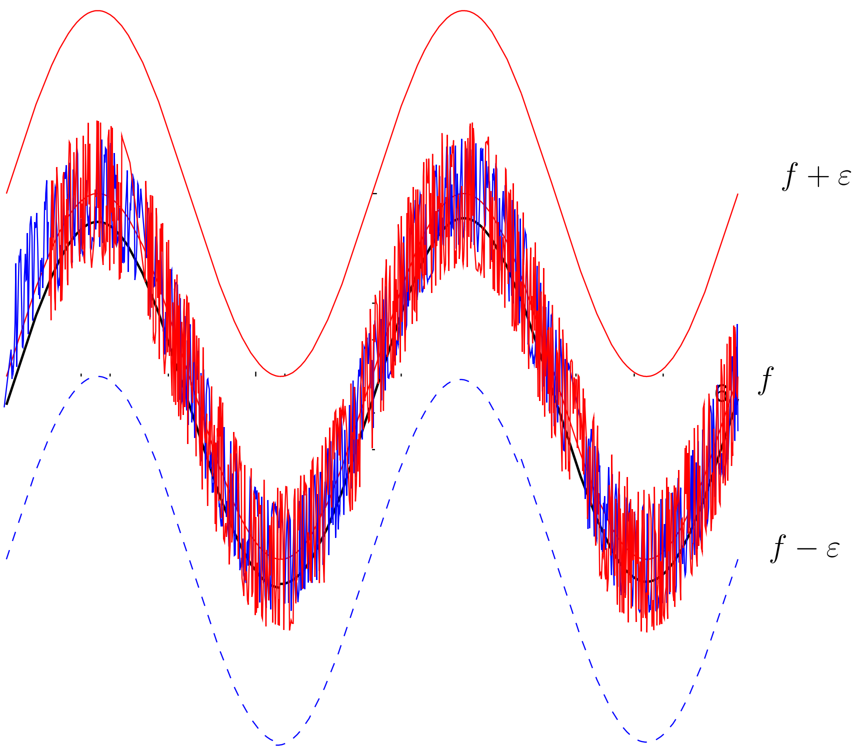
3.2. Määritelmä. Sanotaan, että jono funktioita $f_n : A \to \mathbf{R}$ *suppenee tasaisesti joukossa A kohti funktiota $f : A \to \mathbf{R}$*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(\varepsilon, \text{jono}) \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{kaikilla } x \in A\,, \text{ kunhan } n \geq N\,.$$

Tätä merkitään joskus $f_n \to f$ *tasaisesti A:ssa.*

Tasaisesti suppeneva funktiojono suppenee tietysti pisteittäin, mutta käänteinen väite ei ole tosi, kuten yllä olevissa esimerkeissä näimme.

Huomaa, että tasaisessa suppenemisessa lukua ε vastaava luku N pitää voida valita pisteestä x riippumattomalla tavalla. Tämä tarkoittaa sitä, että funktiot f_n ovat jostain indeksistä alkaen lähellä funktiota f, ns. ε-putkessa.



ε-putki

Tasaista suppenemista voi hahmottaa niin, että siinä mitataan funktioiden välisiä etäisyyksiä; tässä tietysti pitää käyttää soveltuvaa mittaa (”metriikkaa”): jos f ja g ovat joukossa A määriteltyjä funktioita, niin

$$d(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$$

on niiden välinen *etäisyys*. Tämän etäisyyden avulla funktiojonon tasainen suppeneminen vastaa reaalilukujonon suppenemista, kun vain objektien välisiä etäisyyksiä mitataan oikealla tavalla:

3.3. Lause. *Olkoot $f_n, f : A \to \mathbf{R}$ funktioita. Tällöin $f_n \to f$ tasaisesti A:ssa, jos ja vain, jos*

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0\,,$$

ts. kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,, \qquad \textit{kaikilla } n \geq N\,.$$

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $f_n \to f$ tasaisesti A:ssa, niin on $N \in \mathbf{N}$, jolle (kun $n \geq N$)

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } x \in A\,,$$

joten

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

Kääntäen, jos

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,,$$

kun $n \geq N$, niin

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in A\,,$$

joten $f_n \to f$ tasaisesti A:ssa. □

Seuraava Cauchyn ehto kertoo, milloin funktiojono suppenee tasaisesti kohti jotain funktiota, mistä ei tarvitse olla mitään tietoa.

3.4. Lause. (Tasainen Cauchyn kriteerio) *Olkoot $f_n : A \to \mathbf{R}$ funktioita. Tällöin funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti joukossa A (kohti jotain funktiota $f : A \to \mathbf{R}$), jos ja vain, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N \in \mathbf{N}$ siten, että*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \textit{kaikilla } n, m \geq N \quad \textit{ja kaikilla } x \in A\,.$$

Todistus: Se, että tasaisesta suppenemisesta seuraa tasainen Cauchyn ehto menee aivan samoin kuin lukujonon Cauchyn ehdon todistuksessa (ks Analyysi 1, Lause 4.9) – yksityiskohdat harjoituksissa.

Jos taas jono toteuttaa tasaisen Cauchyn ehdon, niin jokaisella x lukujono $f_n(x)$ on Cauchy-jono ja siten suppenee kohti reaalilukua $f(x)$. Näin saadaan rajafunktioehdokas $f : A \to \mathbf{R}$. Se on jonon f_n tasainen raja: Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan tasaisen Cauchyn ehdon antama N, jolle

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n, m \geq N \quad \text{ja kaikilla } x \in A\,.$$

Kun $x \in A$, $f_n(x) \to f(x)$, joten voimme valita luvun $m_x \in \mathbf{N}$, jolle $m_x > N$ ja

$$|f(x) - f_{m_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Näin ollen

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,;$$

erityisesti,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \text{ kaikilla } x\,,$$

kunhan $n \geq N$, ts. jono f_n suppenee tasaisesti A:ssa (kohti funktiota f). □

Pisteittäinen konvergenssi on lokaali ominaisuus: se ottaa huomioon jonon funktioiden arvot vain tarkasteltavassa pisteessä. Tasaisen konvergenssi on luonteeltaan globaalimpi: tasaisesti suppenevan jonon funktiot tulevat kauttaaltaan lähelle rajafunktiota. Täten jonon funktioiden ominaisuudet heijastuvat myös rajafunktioon paremmin, mm. jatkuvuus säilyy tasaisessa konvergenssissa:

3.5. Lause. *Olkoot $f_n : A \to \mathbf{R}$ funktioita, jotka ovat jatkuvia pisteessä $x_0 \in A$. Jos $f_n \to f$ tasaisesti A:ssa, on rajafunktio f myös jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Koska f_n on jatkuva pisteessä x_0, on $\delta > 0$, jolle

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

kaikilla $x \in A$, joilla $|x - x_0| < \delta$. Siten sellaisella x

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

Löysästi puhuen edellinen lause on osa periaatetta ”jos suppeneminen on tasaista, kahden peräkkäisen rajankäynnin järjestys voidaan vaihtaa”. Seuraava lause antaa tästä integraaliversion:

3.6. Lause. *Olkoot $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integroituvia funktioita. Jos $f_n \to f$ tasaisesti välillä $[a, b]$, on rajafunktio f myös Riemann-integroituva ja*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx\,.$$

Todistus: Käytetään Riemannin ehtoa 1.1. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan sellainen $n \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,.$$

Sitten valitaan Riemannin ehdon mukaiset porrasfunktiot g_n ja h_n, joille $g_n \le f_n \le h_n$ ja

$$\int_a^b h_n dx - \int_a^b g_n dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

jolloin myös

$$\left| \int_a^b h_n dx - \int_a^b f_n dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Asettamalla

$$g = g_n - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{ja} \quad h = h_n + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

saadaan porrasfunktiot, joille

$$g = g_n - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \le f_n - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \le f \le f_n + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \le h_n + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} = h$$

ja

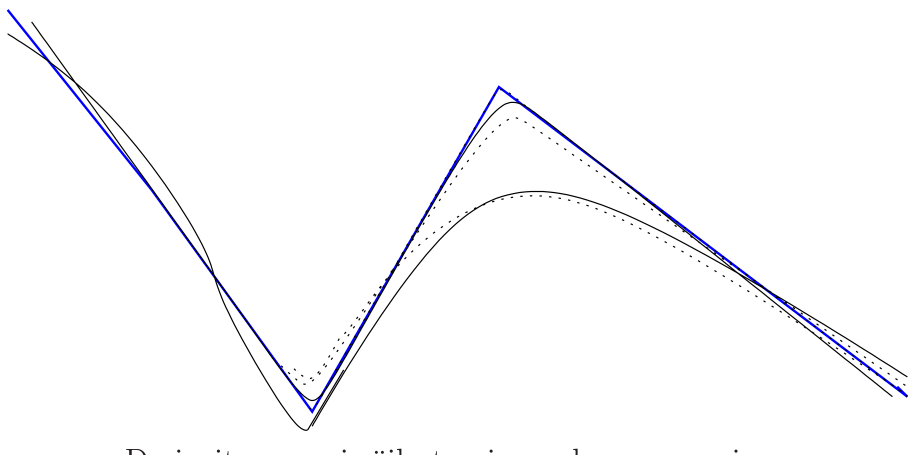
$$\int_a^b h dx - \int_a^b g dx = \int_a^b h_n dx - \int_a^b g_n dx + 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\,,$$

joten f on Riemann-integroituva ja

$$\left| \int_a^b f dx - \int_a^b f_n dx \right| \le \left| \int_a^b h dx - \int_a^b g dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

□

Derivoituvuus ei yleensä säily tasaisessa konvergenssissa, mikä näkyy allaolevasta kuvasta.



Derivoituvuus ei säily tasaisessa konvergenssissa.

Kuitenkin, jos funktioiden jatkuvat derivaatat myös suppenevat tasaisesti, niin rajafunktiokin on derivoituva:

3.7. Lause. *Olkoot $f_n :]a,b[\to \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituvia funktioita. Jos $f_n \to f$ tasaisesti välillä $]a,b[$ ja jos derivaattojen f_n' jono suppenee myös tasaisesti välillä $]a,b[$ kohti funktiota g, niin f on (jatkuvasti) derivoituva ja $f' = g$.*

TODISTUS: Riittää osoittaa, että f on derivoituva ja $f' = g$; derivaatan jatkuvuus seuraaa Lauseesta 3.5.

Tapa 1. Käytetään analyysin peruslausetta 1.6: Kiinnitetään $x_0 \in]a,b[$. Analyysin peruslauseen nojalla

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt\,.$$

Antamalla $n \to \infty$ yhtälön vasen puoli suppenee kohti lukua $f(x)$, oikean puolen integraalin hoitaa edeltävä integraalien konvergenssilause 3.6:

$$\begin{aligned} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

joten väite seuraa analyysin peruslauseen nojalla.

Tapa 2. Käytetään väliarvolausetta 1.4: Kiinnitetään $x_0 \in]a,b[$. Olkoon $h \in \mathbf{R}$ sellainen, että $x_0 \pm h \in]a,b[$. Väliarvolauseen nojalla jokaisella $n \in \mathbf{N}$ on piste ξ_n, jolle $x_0 - |h| \le \xi_n \le x_0 + |h|$ ja

$$\frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} = f_n'(\xi_n)\,.$$

Bolzano-Weierstrassin lauseen (Analyysi 1) nojalla on piste

$$z_h \in [x_0 - |h|, x_0 + |h|]\,,$$

jota kohti eräs ξ_n:n osajono (jota merkitään edelleen ξ_n:llä) suppenee. Nyt derivaattojen tasaisesta konvergenssista ja jatkuvuudesta seuraa (HT), että

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(\xi_n) = g(z_h)\,,$$

joten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} = \lim_{n\to\infty} f'_n(\xi_n) = g(z_h)\,.$$

Koska $z_h \in [x_0-|h|, x_0+|h|]$ ja koska g on jatkuva (Lause 3.5), erotusosamäärällä on raja-arvo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} g(z_h) = g(x_0)\,.$$

□

Taylorin polynomeja käsiteltäessä opimme, että sileätä funktiota voidaan lokaalisti approksimoida hyvin polynomilla. Seuraava lause (jota emme todista tällä kurssilla) kertoo, että jatkuvaa funktiota voidaan aina approksimoida polynomeilla tasaisesti suljetulla välillä.

3.8. Lause. (Weierstrassin approksimointilause) *Olkoon f jatkuva välillä $[a,b]$. Tällöin on olemassa jono polynomeja p_j, joka suppenee kohti f:ää tasaisesti välillä $[a,b]$.*

Seuraava Dinin konvergenssilause on hyödyllistä tietää; huomaa, että oletus suljetusta ja rajoitetusta välistä on siinä oleellinen (HT).

3.9. Lause. (Dini) *Olkoon f_n vähenevä jono jatkuvia funktioita suljetulla välillä $[a,b]$. Jos $f_n \to f$ pisteittäin ja jos f on myös jatkuva, niin $f_n \to f$ tasaisesti välillä $[a,b]$.*

Todistus: Tarkastelemalla funktioita $\tilde{f}_n = f_n - f$ voidaan olettaa, että $f \equiv 0$. Ellei konvergenssi ole tasaista, löydämme luvut $\varepsilon > 0$ ja $x_n \in [a,b]$, joille

$$f_n(x_n) \geq \varepsilon\,.$$

Osajonoon siirtymällä voimme Bolzano-Weierstrassin lauseen (Analyysi 1) nojalla olettaa, että on olemassa $x_0 \in [a,b]$, jolle

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\,.$$

Koska jono f_n on vähenevä pätee kaikilla $j \leq n$:

$$f_j(x_n) \geq f_n(x_n)) \geq \varepsilon\,,$$

joten jatkuvuudesta seuraa, että

$$f_j(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_j(x_n) \geq \varepsilon \quad \text{kaikilla } j\,,$$

joten

$$f_j(x_0) \not\to 0\,, \quad \text{kun } j \to \infty\,,$$

mikä on vastoin pisteittäisen konvergenssin oletusta. $\square$

4. Lukusarjat

Olkoot a_j reaalilukuja, $j \in \mathbf{N}$. Äärellisen monen reaaliluvun $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yhteenlasku on tuttua puuhaa ja niiden summa on

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,.$$

Tässä luvussa tarkastellaan, mitä äärettömällä summalla eli *sarjalla* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ tarkoitetaan (vai tarkoitetaanko mitään). Karkeana ideana on laskea jonon (a_j) alusta yhä useampia ja useampia termejä yhteen ja toivoa, että näin saadut summat tulevat lähestymään jotain lukua. Toisin sanoen muodostetaan summat

$$a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ \ldots\,, \sum_{j=1}^{n} a_j,\ \ldots\,;$$

nämä summat muodostavat uuden reaalilukujonon, joka joko suppenee (jolloin niiden raja-arvoa sanotaan sarjaksi $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ tai sarjan summaksi) tai hajaantuu (jolloin sanotaan, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu).

4.1. Sarjan suppeneminen ja itseinen suppeneminen

4.1. Määritelmä. Olkoot a_j reaalilukuja, $j \in \mathbf{N}$. Muodollista summaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_1 + a_2 + \ldots$$

sanotaan *(luku)sarjaksi*. Sen *j. termi* on luku x_j ja (äärellinen) summa

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,, \quad n \in \mathbf{N} \,,$$

on sarjan $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *n. osasumma.* Jos näiden osasummien $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ muodostama jono suppenee kohti reaalilukua S, sanotaan että *sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee (eli konvergoi)* ja raja-arvo

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

on sen summa; merkitään

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \, .$$

Ellei sarja suppene, niin sanotaan että se *hajaantuu (eli divergoi).*

4.2. Huomautus.

(a) Sarja siis hajaantuu, jos sen osasummien jonolla ei ole raja-arvoa (tai jos mahdollinen raja-arvo on $\pm\infty$).

(b) Usein sarjassa summataan indeksejä 0:stä tai jostain muusta luvusta äärettömään. Ilmeinen pieni muokkaus määritelmään kertoo, mitä silloin tarkoitetaan.

(c) Jos sarjat

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j \, ,$$

suppenevat, niin termien summien ja vakiolla kerrottujen termien muodostamat sarjat suppenevat myös ja

$$\sum_{j=1}^{\infty}(a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \quad \text{sekä} \quad \sum_{j=1}^{\infty}(ca_j) = c\sum_{j=1}^{\infty} a_j \, ,$$

kun $c \in \mathbf{R}$.

(d) Huomaa, että termien summausjärjestys vaikuttaa sarjan suppenemiseen; tästä esimerkkejä myöhemmin (ks 4.18 ja 4.19).

Esimerkki. Sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ kohti lukua e^x, koska osasummien jono on eksponenttifunktion n. Taylorin polynomi, jonka jäännöstermille pätee

$$|R_{n,0} \exp(x)| = |\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}| \leq |\frac{e^{|x|}}{(n+1)!} x^{n+1}| \to 0\,, \text{ kun } n \to \infty\,.$$

4.3. Lause. *Jos sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee, niin*

$$\lim_{j \to \infty} a_j = 0\,.$$

Todistus: Termit saadaan helposti osasummista, joten

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \to \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_j = 0\,.$$

□

Termien suppeneminen nollaan on välttämätön, vaan ei riittävä ehto sarjan suppenemiselle, kuten esimerkiksi harmonisesta sarjasta (Esim. 4.5) opimme.

4.4. Huomautus. Lukujono suppenee, jos se täyttää Cauchyn kriteerion; sarjoihin sovellettuna se kertoo, että sarja suppenee, jos ja vain, jos sen osasummien jono on Cauchy-jono, minkä kanssa on edelleen yhtäpitävää, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$|S_n - S_m| = |\sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{m} a_j| = |\sum_{j=m+1}^{n} a_j| < \varepsilon$$

kunhan $n > m \geq N$.

4.5. Esimerkki. (harmoninen sarja) Sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

sanotaan *harmoniseksi sarjaksi.* Se hajaantuu (tosin hyvin hitaasti), vaikka termit suppenevat nollaan, $\frac{1}{n} \to 0$. Hajaantuminen nähdään helposti: jos $n \in \mathbf{N}$, niin

$$\begin{aligned} |S_n - S_{2n}| &= \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = n\frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

joten osasummien jono ei ole Cauchy eikä näin ollen suppene. Suoremmin hajaantuminen nähdään seuraavasti:

$$S_{2^n} = 1 + \sum_{j=1}^{n} (S_{2^j} - S_{2^{j-1}}) \geq 1 + n\frac{1}{2} \to \infty ,$$

kun $n \to \infty$, joten harmoninen sarja ei suppene..

Induktiolla on (melko) helppo nähdä (ks 4.15), että

$$\log(n+1) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq 1 + \log n ,$$

joten hajaantuminen on hidasta (HT).

Esimerkki. Vuorotteleva harmoninen sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j}$$

suppenee, koska osasummien jono on Cauchy-jono: havaitaan, että kaikilla k

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &\geq S_{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \\ &= S_{2k+1} \geq S_{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\ &= S_{2k+2} = S_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\ &\geq S_{2k} , \end{aligned}$$

joten kaikilla $n, m \geq 2k$

$$|S_n - S_m| \leq S_{2k-1} - S_{2k} = \frac{1}{2k}\,.$$

Siis (S_n) on Cauchy-jono ja siten suppenee.

Huom. Logaritmin Taylor polynomi on

$$\log(1-x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} + R_n(x)\,, \text{ kun } x < 1,$$

missä $R_n(x) \to 0$, kun $n \to \infty$. Tämän avulla saamme toisen tavan todeta vuorottelevan harmonisen sarjan suppeneminen. Lisäksi

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j} = \log(2)\,.$$

Esimerkki. (aritmeettinen sarja) Sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ on aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen termin erotus on vakio, ts. kaikilla j

$$a_{j+1} - a_j = d\,,$$

ts. aritmeettinen sarja on muotoa

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + (j-1)d)\,.$$

Aritmeettinen sarja hajaantuu (ellei sen kaikki termit ole $= 0$), koska

$$|\sum_{j=1}^{n} a_j| = |\sum_{j=1}^{n} a_1 + (j-1)d| = |na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}| = n|\frac{a_1 + (a_1 + (n-1)d)}{2}| \to \infty\,,$$

ellei $a_1 = 0 = d$.

Esimerkki. (geometrinen sarja) Sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ on geometrinen, jos jokaisen kahden peräkkäisen termin suhde on vakio, ts. on sellainen luku q, jolle kaikilla j

$$a_{j+1} = qa_j\,.$$

Ts. geometrinen sarja on muotoa

$$\sum_{j=1}^{\infty} aq^{j-1}\,.$$

Vaihdetaan summausindeksiä, jolloin summa on helpompi muistaa:

$$\sum_{j=1}^{\infty} aq^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} aq^{k}\,.$$

Induktiolla toteamme, että n. osasumma on

$$\sum_{k=0}^{n} aq^{k} = a\sum_{k=0}^{n} q^{k} = \begin{cases} a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{, jos } q \neq 1 \\ a(n+1) & \text{, jos } q = 1\,. \end{cases}$$

Tästä näemme, että geometrinen sarja suppenee, jos ja vain, jos sen suhdeluvulle q pätee $|q| < 1$. Tällöin sarjan summa on

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^{k} = a\sum_{k=0}^{\infty} q^{k} = \frac{a}{1-q}\,,\ \text{jos } q \neq 1\,.$$

4.6. Määritelmä. Olkoot $a_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots$. Sanotaan, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee itseisesti (tai absoluuttisesti)*, jos termien itseisarvojen muodostama sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$$

suppenee.

Suppeneva sarja ei välttämättä suppene itseisesti, sillä esimerkiksi vuorotteleva harmoninen sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j}$$

suppenee, mutta ei itseisesti. Käänteinen kuitenkin pätee:

4.7. Lause. *Itseisesti suppeneva sarja suppenee ja*

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\Big| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\,.$$

TODISTUS: Kolmioepäyhtälön nojalla kaikille $b_j \in \mathbf{R}$ ja $n \in \mathbf{N}$

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} b_j\Big| \le \sum_{j=1}^{n} |b_j|\,, \tag{4.1}$$

joten osasummien

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

jonolle pätee (kun $n > m$)

$$|S_n - S_m| = \Big|\sum_{j=m+1}^{n} a_j\Big| \le \sum_{j=m+1}^{n} |a_j| = \Big|\sum_{j=1}^{n} |a_j| - \sum_{j=1}^{m} |a_j|\Big| < \varepsilon\,,$$

kun n ja m tarpeeksi suuria, koska itseisarvojen osasummien jono on suppenevana jonona Cauchy-jono. Siis (S_n) on myös Cauchy-jono, siis suppeneva.

Väitteen epäyhtälö seuraa kolmioepäyhtälöstä (4.1), koska kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j\Big| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\,.$$

□

Seuraavasta lauseesta saadaan riiittävä ja välttämätön ehto itseiselle suppenemiselle.

4.8. Lause. *Jos $b_j \ge 0$ kaikilla j, niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ suppenee, jos ja vain, jos sen osasummien jono muodostaa rajoitetun jonon, ts. on olemassa $M \in \mathbf{R}$, jolle*

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \le M \qquad \textit{kaikilla } n\,.$$

TODISTUS: Osasummien jono on nouseva; nouseva jono suppenee täsmälleen silloin kun se on rajoitettu. □

4.2. Suppenemistestejä

Seuraavassa esitetään kokoelma testejä sarjojen (itseisen) supenemisen toteamiseksi.

4.9. Lause. (Vertailutesti) *Olkoot* $a_j \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{N}$.

(a) *Jos on olemassa luvut* $b_j \geq 0$, *joille*

$$|a_j| \leq b_j \quad \text{kaikilla } j \in \mathbf{N}$$

ja sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *suppenee, niin sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee (itseisesti).*

(b) *Jos on olemassa luvut* $c_j \geq 0$, *joille*

$$a_j \geq c_j \geq 0 \quad \text{kaikilla } j \in \mathbf{N}$$

ja sarja $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ *hajaantuu, niin sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *hajaantuu.*

Todistus: Tämä seuraa lähes välittömästi lauseesta 4.8 (HT). □

Vertailutestiä on joskus kätevä käyttää seuraavassa rajamuodossa:

4.10. Lause. (Vertailutesti 2) *Olkoot* $a_j \geq 0$ *ja* $b_j \geq 0$, $j \in \mathbf{N}$.

(a) *Jos*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{a_j}{b_j} = a \in]0, \infty[\,,$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee, jos ja vain, jos sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *suppenee.*

(b) *Jos*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{a_j}{b_j} = 0$$

ja jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *suppenee, niin myös sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee.*

(c) *Jos*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = \infty$$

ja jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *hajaantuu, niin myös sarja* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *hajaantuu.*

Todistus: Seuraa Lauseesta 4.9, koska äärellisen monen termin muuttaminen ei vaikuta sarjan suppenemiseen (HT). □

Esimerkki. Sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j^2 + j + 1}$$

hajaantuu, koska

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\frac{j}{j^2+j+1}}{\frac{1}{j}} = 1$$

ja harmoninen sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

hajaantuu.

4.11. Lause. (Suhdetesti) *Olkoot* $a_j \in \mathbf{R}$, $a_j \neq 0$ *kaikilla* $j \in \mathbf{N}$.

(a) *Jos on olemassa luvut* $\rho < 1$ *ja* $N \in \mathbf{N}$, *joille*

$$\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \leq \rho \quad \text{kaikilla } j \geq N, ,$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *suppenee (itseisesti).*

(b) *Jos on olemassa luvut* $\eta > 1$ *ja* $N \in \mathbf{N}$, *joille*

$$\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \geq \eta \quad \text{kaikilla } j \geq N\,,$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *hajaantuu.*

Todistus: a) Koska

$$|a_j| \le \rho|a_{j-1}| \le \rho^2|a_{j-2}| \le \cdots \le \rho^{j-N}|a_N|\,,$$

sarjaa

$$\sum_{j=N}^{\infty} |a_j|$$

majoroi suppeneva geometrinen sarja

$$\sum_{j=N}^{\infty} |a_N|\rho^{j-N}\,,$$

joten väite a) seuraa vertailutestistä 4.9.

b) Nyt

$$|a_j| \ge \eta|a_{j-1}| \le \eta^2|a_{j-2}| \le \cdots \le \eta^{j-N}|a_N| \to \infty\,,$$

kun $j \to \infty$, joten sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu (Lause 4.3). □

4.12. Huomautus. Lauseesta 4.11 saadaan helposti raja-arvoversio ($a_j \neq 0$):

(a) Jos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} < 1\,,$$

niin sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee (itseisesti).

(b) Jos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} > 1\,,$$

niin sarja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

Huomaa, että jos suhdetestissä $\rho = 1$ tai $\eta = 1$ tai jos suhteen raja-arvo on itseisarvoltaan 1, niin suppenemisesta ei voida päätellä mitään, esimerkiksi harmoninen sarja hajaantuu ja vuorotteleva harmoninen sarja suppenee, vaikka molemmille

$$\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = \frac{j}{j+1} < 1 \text{ kaikilla } j\,.$$

Esimerkki. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

suppenee koska

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1\,.$$

Seuraavaa juuritestiä on usein hieman vaikeampi käyttää kuin edellisiä testejä, mutta se on kuitenkin tärkeä suppenemistesti.

4.13. Lause. (Juuritesti) *Olkoot* $a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

(a) *Jos on olemassa luvut* $\rho < 1$ *ja* $N \in \mathbf{N}$, *joille*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \rho \quad \text{kaikilla } n \geq N\,,$$

niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee (itseisesti).*

(b) *Jos on olemassa luvut* $\eta > 1$ *ja* $N \in \mathbf{N}$, *joille*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \eta \quad \text{kaikilla } n \geq N\,,$$

niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hajaantuu.*

Erityisesti, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L\,,$$

niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee (itseisesti), jos* $L < 1$ *ja hajaantuu, jos* $L > 1$.

Todistus: (a) Koska $|a_n| \leq \rho^n$, niin sarjalla $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ on majoranttina suppeneva sarja $\sum_{n=N}^{\infty} \rho^n$, joten väite seuraa vertailutestistä 4.9.

(b) Tällöin $|a_n| \geq \eta^n \geq 1$ äärettömän monella n, joten termit a_n eivät suppene nollaan eikä sarja siten voi supeta (Lause 4.3). □

Esimerkki. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

suppenee, koska

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Seuraavasta "2^m-testistä" on joskus hyötyä:

4.14. Lause. (2^m-testi) *Olkoot $a_n \in \mathbf{R}$ laskeva jono ei-negatiivisia lukuja (ts. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$), joille*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, jos ja vain, jos sarja $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ suppenee.

TODISTUS: *"Jos":* Olkoon $N \in \mathbf{N}$ ja valitaan se kokonaisluku M, jolle

$$2^{M-1} \leq N < 2^M\,.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n &\leq \sum_{n=1}^{2^M-1} a_n \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{M-1}} + \cdots + a_{2^M-1}) \\
&\leq 2^0 a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + \cdots + 2^{M-1} a_{2^{M-1}} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} 2^m a_{2^m} \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m} < \infty\,,
\end{aligned}$$

joten osasummien jono on rajoitettu ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ siten suppenee.

"Vain jos": Samaan tapaan, sillä

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} 2^m a_{2^m} &= \sum_{m=1}^{M} 2^{m-1} a_{2^m}\\ &\le (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\dots\\ &+(a_{2^{M-1}+1}+a_{2^{M-1}+2}+\dots+a_{2^M})\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty\,.\end{aligned}$$

Yksityiskohdat HT. □

Esimerkki. (Yli- ja aliharmoniset sarjat) Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,,\qquad \text{missä } p>0\,.$$

Käytetään 2^m-testiä 4.14, missä $a_n = n^{-p}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{(2^m)^p} = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^{p-1}}\Big)^m\,,$$

mikä on geometrinen sarja, joka suppenee jos ja vain, jos $1/2^{p-1} < 1$ eli $p > 1$. Siis yliharmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,,\quad p>1\,,\quad \text{suppenee}$$

ja aliharmoninen (ja harmoninen) sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,,\quad 0<p\le 1\,,\quad \text{hajaantuu.}$$

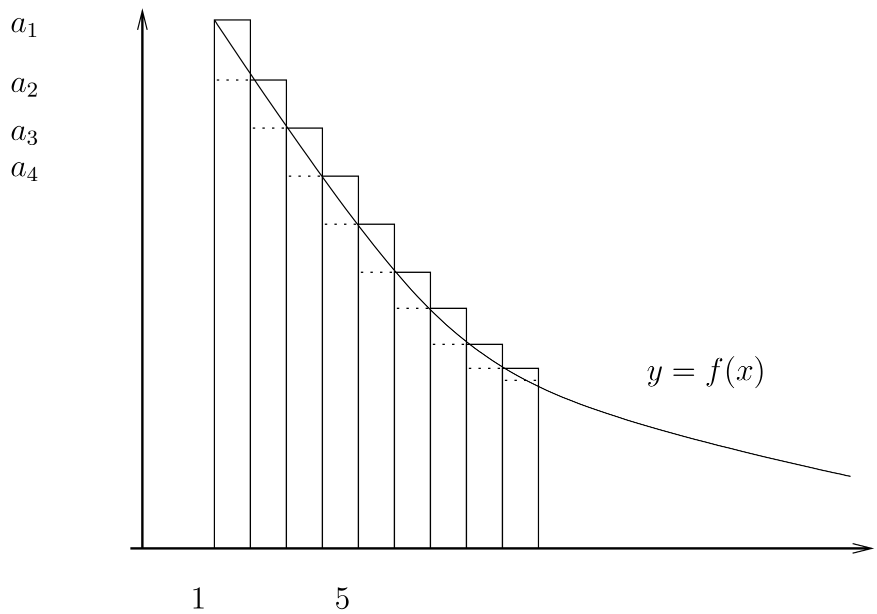
4.15. Lause. (Integraalitesti) *Olkoon* $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ *jatkuva ja vähenevä funktio ja*

$$a_n = f(n)\,.$$

Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee jos ja vain, jos epäoleellinen integraali*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

suppenee.



Todistus:

Väite seuraa, koska kaikilla N (ks. kuva)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N} f(n) &= \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} f(n)\,dx \le \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \\
&= \int_1^N f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(n)\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} a_n\,.
\end{aligned}$$

Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Esimerkki. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\log(n+2)}$$

hajaantuu, koska määrittelemällä

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)\log(x+2)}\,, \quad x \geq 1\,,$$

voidaan soveltaa integraalitestiä ja laskemme:

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x)\,dx &= \int_1^a \frac{\frac{1}{(x+2)}}{\log(x+2)}\,dx \\ &= \Big/_1^a \log(\log(x+2)) = \log(\log(a+2)) - \log(\log(3)) \\ &\to \infty\,,\end{aligned}$$

kun $a \to \infty$.

4.16. Huomautus. Yksi suppenemistesti ei sovellu joka sarjaan, vaan usein pitää kokeilla useampia testejä ennen kuin onnistuu. Huomaa myös, että esimerkiksi vertailutestin käytössä riittää löytää karkea epäyhtälö (ja vain häntäpään termeille), esimerkiksi ehto

$$|a_n| \leq \frac{1000000000000000000000000}{n^2}\,, \qquad \text{kun } n > 10^{55}$$

on ihan riittävä takaamaan sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisen suppenemisen.

Muista myös erottaa oleelliset osat epäoleellisista, esimerkiksi luvussa $2^n - n^7$ osa 2^n on määräävä isoilla n.

4.3. Sarjan ehdollinen suppeneminen

Kun sarjan termit eivät kaikki ole samanmerkkisiä, niin suppeneva sarja ei välttämättä suppene itseisesti. Tällaisista esimerkkinä on vuorotteleva harmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\,,$$

joka suppenee, mutta ei itseisesti. Joskus halutaan korostaa, ei-itseistä (ei-absoluuttista) konvergenssiä ja sanotaan, että sarja suppenee ehdollisesti. Tässä jaksossa tarkastellaan tähän liittyviä ilmiöitä.

4.17. Lause. (Leibnitzin testi vuorotteleville sarjoille) *Olkoon a_n vähenevä jono ei-negatiivisia reaalilukuja, ts. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$. Jos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,$$

niin vuorotteleva sarja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ suppenee. Edelleen, sarjan osasummien S_n jonolle pätee

$$S_{2n} \leq \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}a_j \leq S_{2n-1} \quad \textit{kaikilla } n.$$

Todistus: Kun

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_j\,,$$

niin

$$S_{2n-1} = \sum_{j=1}^{2n-1}(-1)^{j-1}a_j = S_{2n+1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq S_{2n+1}\,,$$

koska jono a_j on vähenevä. Siten jono $(S_{2n-1})_n$ on vähenevä. Samoin nähdään, että jono $(S_{2n})_n$ on kasvava:

$$S_{2n} = \sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j-1}a_j = S_{2n+2} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq S_{2n+2}\,.$$

Koska lisäksi

$$S_1 \geq S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n} \geq S_{2n} \geq S_2\,,$$

ovat molemmat jonot $(S_{2n-1})_n$ ja $(S_{2n})_n$ rajoitettuja, joten niillä on reaaliset raja-arvot:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S \quad \text{ja}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \tilde{S}\,.$$

Koska

$$0 \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \to 0\,,$$

on $S = \tilde{S}$ ja väite seuraa. □

Esimerkki. Kuten tiedämme vuorotteleva harmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

suppenee, mutta ei itseisesti. Vaihdetaan seuraavassa sen termien

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

summausjärjestystä: olkoon $b_1 = a_n$ ja valitaan summataan parittomien indeksien termejä kunnes termien summa on ≥ 2. Sitten otetaan seuraavaksi b-termiksi ensimmäinen negatiivinen termi $a_2 = -\frac{1}{2}$ ja sitten taas summataan parittomia indeksejä, positiivisia termejä, kunnes kokonaissumma ylittää arvon 3. Nyt lisätään $a_4 = -\frac{1}{4}$ ja jatketaan positiivitermien summaamista. Näin jatkamalla saadaan termit helposti järjestetyksi niin, että uudessa järjestyksessä summattu sarja hajaantuu (ks. yksityiskohdat tarkemmin alla 4.19).

Ei-itseisesti suppenevan sarjan suppenemista sanotaan joskus ehdolliseksi juuri sen tähden, että summausjärjestystä vaihtamalla suppeneminen voidaaan kadottaa.

Itseisesti suppenevalle sarjalle on ihan sama, missä järjestyksessä termit lasketaan yhteen: Sanotaan, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ on saatu sarjasta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *summausjärjestystä vaihtamalla*, jos on olemassa bijektio $j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, jolle

$$b_{j(n)} = a_n \quad \text{kaikilla } n\,.$$

4.18. Lause. *Olkoon sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ saatu sarjasta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ summausjärjestystä vaihtamalla. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenee myös itseisesti ja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,.$$

TODISTUS: Olkoon S_j sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osasummien jono ja S sen raja-arvo. Olkoon T_j uudelleen järjestetyn sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ osasummien jono. Jos $\varepsilon > 0$, niin voidaan valita sellainen M, jolle

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

jolloin myös

$$|S_j - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } j \geq M\,.$$

Valitaan N niin suureksi, että kaikki M ensimmäistä a_n-termiä ovat N ensimmäisen b_n-termin joukossa, ts.

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_M\} \subset \{b_1, b_2, \ldots, b_N\}\,.$$

Tällöin kaikilla $n \geq N$

$$|S_M - T_n| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

joten

$$|T_n - S| \leq |S - S_M| + |S_M - T_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

□

Ei-itseisesti suppenevan sarjan voi uudelleen järjestäminen sekoittaa pahoin:

4.19. Lause. (Riemannin uudelleenjärjestyslause) *Olkoon sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppeneva, mutta ei itseisesti suppeneva. Jokaisella* $s \in \mathbf{R}$ *voidaan sarjasta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *summausjärjestystä vaihtamalla muodostaa sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, joka suppenee kohti lukua* s*.*

TODISTUS: Olkoot $p_1, p_2, \ldots$ sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ei-negatiiviset termit alkuperäisessä järjestyksessään lueteltuina. Samoin $q_1, q_2, \ldots$ on negatiivisten termien jono. Nyt sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

hajaantuvat, koska jos ne molemmat suppenesivat, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenesi itseisesti. Jos taas toinen em. sarjoista suppenisi ja toinen hajaantuisi, niin sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osasummien jono lähestyisi joko postiivista tai negatiivista äärettömyyttä.

Koska alkuperäinen sarja suppenee, sen termit suppenevat nollaan; siten

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} q_n = 0\,.$$

Näiden alkuvalmistelujen jälkeen voimme järjestää sarjan termit uudelleen: Valitaan ensin positiivitermit $p_1, p_2, \ldots, p_{k_1}$, missä k_1 on ensimmäinen indeksi, jolle

$$\sum_{n=1}^{k_1} p_n > s\,.$$

Tällainen k_1 on mahdollista valita koska positiivitermien sarja hajaantuu. Sitten summataan negatiivisia termejä $q_1, q_2, \ldots, q_{l_1}$ missä l_1 on ensimmäinen indeksi, jolle

$$\sum_{n=1}^{k_1} p_n + \sum_{n=1}^{l_1} q_n < s\,.$$

Jatketaan summaamalla positiivitermejä, kunnes päästään kokonaissummassa taas yli luvun s; sitten negatiivisia, kunnes taas s:n alapuolelle jne. Positiivisia termejä summattaessa ($(n+1)$. kertaa) osasummien arvo on lukujen $s + q_{l_n}$ ja $s + p_{k_{n+1}}$ välissä. Negatiivisia termejä summattaessa (n. kertaa) osasummien arvo on lukujen $s + q_{l_n}$ ja $s + p_{k_n}$ välissä. Koska

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0 \quad \text{ja} \lim_{n\to\infty} q_n = 0\,,$$

osasummat väkisin suppenevat kohti haluttua lukua s.

□

Olkoot seuraavassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ kaksi itseisesti suppenevaa sarjaa. Pyritään muodostamaan termeistä tuloja, joiden muodostama sarja suppenisi kohti lukua

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big)\,.$$

Lasketaan muodollisesti:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots) \\
&\quad = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + (a_4b_1 + \cdots + a_1b_4) + \ldots \\
&\quad = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\,,
\end{aligned}$$

missä

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j+1}\,.$$

Sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sanotaan sarjojen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *Cauchyn tuloksi.*

4.20. Lause. *Olkoot* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *kaksi itseisesti suppenevaa sarjaa. Tällöin niiden Cauchyn tulo suppenee itseisesti ja*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,,$$

missä siis

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j+1}\,.$$

Todistus: Tarkastellaan sarjaa

$$\begin{aligned} &a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3 + \dots \\ &+ a_nb_1 + a_nb_2 + a_nb_3 + \dots + a_nb_n + a_{n-1}b_n + \dots + a_1b_n + \dots\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Tämän k^2. osasumma on tulo

$$\Big(\sum_{n=1}^{k} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{k} b_n\Big)\,.$$

Koska alkuperäiset sarjat suppenevat itseisesti, niin sarjan (4.2) termien itseisarvojen osasummilla on ylärajana tulo

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\Big) < \infty\,,$$

joten sarja (4.2) suppenee itseisesti. Näin ollen sen termien summausjärjestystä voidaan vaihtaa eikä suppeneminen eikä sarjan summa tästä muutu (Lause 4.18). Koska Cauchyn tulo saadaan selvästi sarjasta (4.2) summausjärjestystä vaihtamalla, väite seuraa koska, jos S_k on sarjan (4.2) k. osasumma, niin

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} S_{k^2} = \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{k} b_n\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big)\,.$$

$\square$

Esimerkki. Geometrisestä sarjasta tiedämme, että kaikilla $x \in]-1,1[$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$$

ja sarja suppenee itseisesti, kun $x \in]-1,1[$. Siten sen Cauchyn tulo itsensä kanssa antaa

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} x^{j-1} x^{k-j+1-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \,,$$

mikä Lauseen 4.20 nojalla suppenee itseisesti kaikilla $x \in]-1,1[$.

5. Potenssisarjat

Tässä luvussa tarkastellaan funktioiden $f_j : A \to \mathbf{R}$ muodostamia sarjoja

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j \,;$$

lähinnä muotoa

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$$

olevia *potenssisarjoja.*

5.1. Funktiosarjat ja niiden suppeneminen

Aluksi yleistetään sarjan käsite funktioiden summille aivan samoin kuin luvussa 3 yleistimme lukujonon suppenemisen funktioiden jonoille:

5.1. Määritelmä. (**Funktiosarjat**) Olkoon $f_n : A \to \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Muodollista summaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \ldots$$

sanotaan *funktiosarjaksi.* Sanotaan, että funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee (pisteittäin) joukossa* A, jos sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{suppenevat jokaisella } x \in A \,.$$

Funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee itseisesti, jos itseisarvofunktioiden sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ suppenee.

Edelleen sanotaan, että funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee tasaisesti joukossa* A, jos osasummien S_k,

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \,,$$

jono suppenee tasaisesti joukossa A. Toisin sanoen on olemassa funktio $f : A \to \mathbf{R}$, jolle kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$|S_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in A\,, \text{ kun } k \geq N\,.$$

5.2. Huomautus. a) Suppeneva funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ määrää siis funktion $f : A \to \mathbf{R}$, jonka arvo pisteessä x on lukusarjan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ summa,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,.$$

Tällöin siis osasummafunktiot S_k,

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\,,$$

suppenevat kohti funktiota f joko pisteittäin tai tasaisesti riippuen siitä kummalla laillla sarja suppenee. Luvun 3 funktiojonojen suppenemista ja luvun 4 sarjojen suppenemista koskevat tulokset ovat nyt käytettävissä.

b) Tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerio 3.4 tulkittuna funktiosarjoille kertoo, että funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti (kohti jotain funktiota $f : A \to \mathbf{R}$) jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sup_{x\in A} \left| \sum_{n=m+1}^{k} f_n(x) \right| = \sup_{x\in A} |S_k(z) - S_m(z)| < \varepsilon\,, \qquad \text{kun } k > m \geq N\,.$$

c) Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti joukossa A, niin funktiojono f_n suppenee tasaisesti kohti nollafunktiota, koska

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{n-1} f_k\,,$$

(vrt. Lause 4.3).

Funktiojonoja koskevista tuloksista saamme heti seuraavan.

5.3. Lause. *Olkoot $f_n : I \to \mathbf{R}$ funktioita, joille funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti välillä I.*

(a) *Jos funktiot f_n ovat jatkuvia, niin summafunktio $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ on jatkuva.*

(b) *Jos funktiot f_n ovat Riemann-integroituvia välillä $[a,b] \subset I$, niin summafunktio $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ on Riemann-integroituva ja*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

(c) *Jos funktiot f_n ovat jatkuvasti derivoituvia ja jos myös derivaattafunktioiden sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ suppenee tasaisesti (avoimella) välillä I, niin summafunktio $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ on jatkuvasti derivoituva ja*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \textit{kaikilla } x \in I\,.$$

TODISTUS: a) on Lause 3.5, b) Lause 3.6 ja c) Lause 3.7. □

Seuraava Weierstrassin M-testi on erittäin tärkeä apukeino funktiosarjoja käsitellessä: funktiosarja suppenee tasaisesti, jos funktioiden itseisarvojen supremumien muodostama lukusarja suppenee.

5.4. Lause (Weierstrassin M-testi)**.** *Olkoon $f_n : A \to \mathbf{R}$ jono funktioita, joille kaikilla $n \in \mathbf{N}$ on sellainen $M_n < \infty$, että*

$$|f_n(x)| \le M_n \qquad \textit{kaikilla } x \in A\,.$$

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee itseisesti ja tasaisesti joukossa A.

Todistus: Itseinen suppeneminen seuraa vertailutestistä 4.9. Olkoon

$$S_m(z) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\,.$$

Nyt kun $k > m$, niin kaikilla $x \in A$

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_k(x)| &= \left| \sum_{n=m+1}^{k} f_n(x) \right| \\ &\le \sum_{n=m+1}^{k} |f_n(x)| \le \sum_{n=m+1}^{k} M_n \\ &= \sum_{n=1}^{k} M_n - \sum_{n=1}^{m} M_n < \varepsilon, \end{aligned}$$

kun $k > m \ge N_\varepsilon$, sillä $\left(\sum_{n=1}^{k} M_n \right)_k$ on Cauchy-jono, koska se suppenee. Siten $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ toteuttaa tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerion ja suppenee siten tasaisesti A:ssa. □

5.2. Potenssisarjat

Olkoon $a_j \in \mathbf{R}$ ja $x_0 \in \mathbf{R}$ Muotoa

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$$

olevaa funktiosarjaa (muuttujana on luku x) sanotaan *potenssisarjaksi* tai *Taylor-sarjaksi*. Luvut a_j ovat potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ *kertoimet* ja piste x_0 sen *keskus*.

Vertaamalla potenssisarjaa geometriseen sarjaan saadaan seuraava tulos:

5.5. Lause. *Jos potenssisarja* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ *suppenee, kun* $x = x_1$, *niin se suppenee itseisesti kaikilla* x, *joille* $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Jos potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ *hajaantuu, kun* $x = x_2$, *niin se hajaantuu kaikilla* x, *joille* $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.

TODISTUS: Olkoon $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ (voidaan olettaa, että $x \neq x_0$). Koska sarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x_1 - x_0)^j$ suppenee, sen termit suppenevat nollaan (Lause 4.3) ja siis on luvut $M \in \mathbf{R}$ ja $N \in \mathbf{N}$, joille

$$|a_j(x_1 - x_0)^j| \leq M \qquad \text{kaikilla } j \geq N\,.$$

Näin ollen

$$|a_j(x - x_0)^j| = |a_j(x_1 - x_0)^j| \frac{|x - x_0|^j}{|x_1 - x_0|^j} \leq M \left(\frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \right)^j \qquad \text{kaikilla } j \geq N\,,$$

joten koska

$$\frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} < 1\,,$$

sarjaa $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ majoroi suppeneva geometrinen sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} M \left(\frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \right)^j\,,$$

ja siten se suppenee itseisesti (Lause 4.9).

Sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ hajaantuminen, kun $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$, nähdään samaan tapaan vertaamalla sitä geometriseen sarjaan (HT). □

Esimerkki. Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}\,.$$

Kun $x = 1$, kyseessä on harmoninen sarja, joka hajaantuu. Siten lauseen 5.5 mukaan ko. potenssisarja hajaantuu aina, kun $|x| > 1$. Kun taas $x = -1$, kyseesä on vuorotteleva harmoninen sarja, joka suppenee. Lauseen 5.5 nojalla potenssisarja suppenee itseisesti, kun $|x| < 1$. Näin ollen esimerkin potenssisarja suppenee täsmälleen välillä $[-1, 1[$, itseisesti avoimella välillä $]-1, 1[$.

5.6. Määritelmä. Potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ *suppenemissäde* on luku

$$R = \sup\{|x-x_0| : \text{ sarja } \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j \text{ suppenee } \}.$$

Tällöin $0 \le R \le \infty$ ja avoin väli $]x_0 - R, x_0 + R[$ on potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ *suppenemisväli.*

Huomaa, että jos $R = 0$, on suppenemisväli tyhjä ja potenssisarja suppenee tällöin vain keskuksessaan $x = x_0$. Jos taas $R = \infty$, potenssisarja suppenee koko **R**:ssä.

5.7. Lause. *Olkoon R potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenemissäde ja $0 < r < R$. Tällöin potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenenee itseisesti suppenemisvälillään $]x_0 - R, x_0 + R[$ ja tasaisesti välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$.*

Edelleen potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ hajaantuu jokaisella $x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$.

TODISTUS: Itseistä suppenemista ja hajaantumista koskevat väitteet seuraavat lauseesta 5.5.

Tasainen konvergenssi seuraa Weierstrassin M-testistä 5.4, sillä kun $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, niin

$$|a_j(x-x_0)^j| \le |a_j|r^j$$

ja sarja $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|r^j$ suppenee sillä sen termit ovat potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ termien itseisarvoja pisteessä $x = x_0 + r$, joka kuuluu suppenemisvälille. □

Esimerkki. Millä x:n arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n n^2}$$

suppenee? Sovelletaan (tällä kerralla) suhdetestiä 4.11: peräkkäisten termien suhde on itseisarvoltaan

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^2}}{\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n n^2}}\right| = \frac{1}{2}|x-1|\frac{n^2}{(n+1)^2} \to \frac{1}{2}|x-1|\,,$$

joten suhdetestin mukaan sarja suppenee, jos $\frac{1}{2}|x-1| < 1$ eli jos $-1 < x < 3$ ja hajaantuu, jos $\frac{1}{2}|x-1| > 1$ eli jos $x \notin [-1,3]$. Näin ollen sarjan suppenemissäde on 2 ja suppenemisväli $]-1,3[$. Kun $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,,$$

ja kun $x = 3$, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

joten sarja suppenee itseisesti suljetulla välillä $[-1,3]$ ja hajaantuu sen ulkopuolella.

Ennenkuin oikein voimme hyödyntää potenssisarjojen suppenemista koskevaa tulosta, osoitamme, että suppenemissäde riippuu vain kertoimista (ja niiden avulla voimme myös määrätä suppenemissäteen).

5.8. Lemma. *Olkoon R potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenemissäde.*

Jos luvulle $R_1 > 0$ löytyy sellainen $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{R_1}\,, \qquad \textit{kun } n \ge N\,,$$

niin $R_1 \le R$.

Jos

$$\sqrt[n]{|a_n|} \ge \frac{1}{R_2} \qquad \textit{äärettömän monella } n\,,$$

niin $R_2 \ge R$.

Todistus: Jos $|x - x_0| < R_1$, niin

$$|a_n(x-x_0)^n| \le \left(\frac{|x-x_0|}{R_1}\right)^n, \qquad \text{kun } n \ge N\,.$$

Siten sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenee vertailutestin 4.9 nojalla, koska majoroiva geometrinen sarja

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|x-x_0|}{R_1}\right)^n$$

suppenee, sillä

$$0 \le \frac{|x-x_0|}{R_1} < 1\,.$$

Siten $R_1 \le R$ Lauseen 5.7 nojalla.

Potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hajaantuminen, kun $|x-x_0| \ge R_2$ seuraa, koska tällöin sarjan termit eivät lähesty nollaa, koska äärettömän monella n

$$|a_n(x-x_0)^n| \ge \left(\frac{|x-x_0|}{R_2}\right)^n \ge \left(\frac{R_2}{R_2}\right)^n = 1\,.$$

Siis $R_2 \ge R$.

□

Lemman 5.8 avulla saadaan suppenemissäde määritetyksi (HT):

5.9. Lause. *Olkoon R potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenemissäde. Tällöin*

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} (\sup\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \ge k\})\,.$$

Erityisesti,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{tai} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\,,$$

mikäli em. raja-arvot ovat olemassa.

Huomaa, että koska

$$\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \geq k+1\} \subset \{\sqrt[n]{|a_n|} : n \geq k\}$$

on jono $(\sup\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \geq k\})$ laskeva, joten raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty}(\sup\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \geq k\}) = \lim_{k\to\infty}(\sup\{\sqrt[k]{|a_k|}, \sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}, \sqrt[k+2]{|a_{k+2}|}, \dots\})$$

on aina olemassa (mahdollisesti $= \infty$ jolloin suppenemissäde on $= 0$). Lauseen 5.9 alkuosa seuraa heti Lemmasta 5.8. Loppuosa jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki. Potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

suppenemissäde on 1, koska

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

tai koska

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Lauseen 5.13 alla ja Taylorin polynomien avulla on helppo nähdä, että

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{kaikilla } x \in]-1,1[\,.$$

5.10. Lemma. *Potenssisarjalla* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *ja derivaattojen sarjalla*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

on sama suppenemissäde.

Todistus: Koska

$$(x - x_0) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n \,,$$

derivaattasarjan suppenemissäde saadaan Lauseen 5.9 mukaan luvuista

$$\sqrt[n]{n|a_n|} = n^{1/n} \sqrt[n]{|a_n|} \,.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, seuraa tästä, että

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} (\sup\{ \sqrt[n]{n|a_n|} : n \geq k\}) &= \lim_{k\to\infty} (\sup\{ \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} : n \geq k\}) \\ &= \lim_{k\to\infty} (\sup\{ \sqrt[n]{|a_n|} : n \geq k\}) \,,\end{aligned}$$

mistä väite seuraa (Lause 5.9).

□

Seuraava lause selittää, miksi potenssisarjoja kutsutaan myös Taylor-sarjoiksi (ks. Lause 2.3).

5.11. Lause. *Olkoon R potenssisarjan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ suppenemissäde. Tällöin funktiolla*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat suppenemisvälillä $]x_0 - R, x_0 + R[$. Edelleen derivaatat saadaan derivoimalla sarjan termit,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \qquad \textit{kaikilla } x \in]x_0 - R, x_0 + R[\,.$$

Erityisesti,

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n \qquad \textit{kaikilla } n \in \mathbf{N}\,.$$

Todistus: Funktion f k. osasumman derivaatta on

$$S_k'(x) = \sum_{n=1}^{k} n a_n (x - x_0)^{n-1}\,.$$

Lemman 5.10 nojalla nämä suppenevat tasaisesti jokaisella suljetulla välillä $[a, b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$ kohti väitteen derivaattasarjaa. Siten Lause 3.7 kertoo, että f on derivoituva ja

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \qquad \text{kaikilla } x \in]x_0 - R, x_0 + R[\,.$$

Sijoittamalla $x = x_0$ saamme tästä

$$f'(x_0) = a_1\,.$$

Loppuosa väitteestä induktiolla (HT). □

Lause 5.11 näyttää, että saman keskuksen x_0 ympärille kehitetyn potenssisarjan kertoimet määräytyvät yksikäsitteisesti sarjan arvoista:

5.12. Seuraus. *Jos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \qquad \textit{kaikilla } x \in]x_0 - R, x_0 + R[\,,$$

niin

$$a_n = b_n \qquad \textit{kaikilla } n \in \mathbf{N}\,.$$

Esimerkki. Lasketaan sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\,.$$

Tutkitaan potenssisarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n\,,$$

jonka suppenemissäde on 1, koska $\sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \to 1$. Koska potenssiarjalla ja sen derivaattasarjalla on sama suppenemissäde (Lemma 5.10), sarja voidaan derivoida ja integroida lauseen 5.11 nojalla termeittäin:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(nx^n) \\
&= x \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \frac{d}{dx} \left(x \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \right) \\
&= x \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= x \frac{1+x}{(1-x)^3} \,,
\end{aligned}$$

missä sarjan laskemiseen käytettiin esimerkkiä lauseen 4.20 jälkeen. Nyt evaluoimalla sarja pisteessä $x = \frac{1}{2}$ saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6 \,.$$

Lauseen 5.11 mukaan potenssisarjalla esitettävissä oleva funktio käyttäytyy tosi hyvin: sillä on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat ja nämä saadaan derivoimalla sarja termeittäin. Kaikkia funktioita, joilla on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat, ei kuitenkaan voi esittää potenssisarjana, esimerkiksi funktio

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ jos } x \neq 0 \,, \\ 0 & , \text{ jos } x = 0 \,, \end{cases}$$

on tällainen: jos sillä olisi origo-keskinen potenssisarjaesitys

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,,$$

niin lauseen 5.11 nojalla kertoimet kaikki häviäisivät, sillä

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N} \,.$$

Funktio g ei kuitenkaan ole $\equiv 0$ origon ympäristössä, joten sillä ei voi olla potenssisarjaesitystä.

Taylorin lauseen 2.3 nojalla tiedämme, että jos funktiolla f on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat pisteen x_0 ympäristössä I, niin kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n,x_0}f(x)\,,$$

kun $x \in I$. Taylorin polynomeista saatu potenssisarja

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

suppenee pisteessä x, jos ja vain, jos jäännöstermeille $R_{n,x_0}f$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}f(x) = 0\,.$$

Tällöin myös

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,.$$

Seuraavassa lauseessa annamme ehdon funktiolle, jotta se voitaisiin esittää potenssisarjana.

5.13. Lause. *Olkoon funktiolla f kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat välillä $]x_0 - r, x_0 + r[$. Jos on olemassa $M > 0$, jolle kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee*

$$|f^{(n)}(x)| \le M^n \qquad \text{kaikilla } x \in]x_0 - r, x_0 + r[\,,$$

niin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{kaikilla } x \in]x_0 - r, x_0 + r[$$

ja potenssisarjan suppenemissäde on $\ge r$.

Todistus: Edellä olevan perusteella riittää näyttää, että kaikilla x Taylor-kehitelmän jäännöstermi $R_{n,x_0}f(x)$ suppenee kohti nollaa, kun $n \to \infty$. Käytetään Lagrangen muotoa jäännostermille 2.7: pisteiden x ja x_0 välissä on olemassa luku ξ, jolle

$$|R_{n,x_0}f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \le \frac{M^{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{(Mr)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0\,,$$

kun $n \to \infty$. □

5.14. Esimerkki. Eksponenttifunktiolle pätee:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}\,,$$

sillä

$$|\frac{d^n}{dx^n} e^x| = |e^x| \leq e^r \leq (e^r)^n \qquad \text{kaikilla } x \in [-r, r]\,.$$

(Lauseen 5.9 avulla potenssisarjan suppenemissäteen näkee helposti olevan ∞.)

Samaan tapaan nähdään (HT), että

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ja

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,,$$

mitkä molemmat sarjat suppenevat koko **R**:ssä.