JOHDATUS RIIPPUMATTOMIEN KOMPONENTTIEN ANALYYSIIN

DEMO 3, 11.11.2010 klo 12.15-14 salissa MaD205[1]

1. Osoita, että
$$\frac{\partial \boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}^T}{\partial \boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{x}.$$

2. Olkoon $\boldsymbol{x} \sim N(\mathbf{0}, I_d)$, ja U jokin ortogonaalinen matriisi. Osoita, että $\boldsymbol{x}$ ja $U\boldsymbol{x}$ ovat samoinjakautuneita.

3. Olkoon x ja y riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ovat nollia. Osoita, että
$$kurt(x+y) = kurt(x) + kurt(y).$$

4. Osoita, että tasajakauma tiheysfunktiolla
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & \text{kun } |x| \leq \sqrt{3} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$
on subgaussinen ($kurt(x) < 0$) jakauma, ja Laplace jakauma tiheysfunktiolla
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}|x|)$$
on supergaussinen ($kurt(x) > 0$) jakauma.
Aputulos: $\int_0^\infty x^4 \frac{2}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}x) = 6.$

R-demoja:

5. (a) Generoi $n = 500$ vektoria $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2)^T$, joiden komponentit ovat riippumattomia ja noudattavat t-jakaumaa vapausasteella 3.

   (b) Valitaan sekoitusmatriisiksi
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Plottaa alkuperäiset komponentit sekä sekoitetut havainnot $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{s}$.

   (c) Plottaa valkaistut havainnot $\boldsymbol{z} = S_x^{-1/2}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})$ ja vertaa näitä alkuperäisiin komponentteihin.

6. Toimi kuten tehtävässä 5, mutta generoi havainnot standardoidusta normaalijakaumasta.

[1] Demohyvitykset: 6 tehtävää – 1 piste; 3 tehtävää – 1/2 pistettä.

7. (a) Tarkastellaan kokeellisesti keskeistä raja-arvolausetta. Olkoon x_i, $i = 1, \ldots, n$ riippumattomia havaintoja tasajakaumasta $U(-1, 1)$, ja

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Generoi $m = 1000$ realisaatiota muuttujasta y, kun $n = 2$, $n = 4$ ja $n = 10$.

(b) Tutki muuttujien y normaalisuutta eri n:n arvoilla. Voit esimerkiksi standardoida muuttujat y ja tutkia Q-Q -plotin avulla noudattavatko nämä normaalijakaumaa tai estimoida tiheysfunktiot (**density**-funktio).