Energian lausekkeesta $E = mc^2\gamma = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ seuraa:

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^4 + \frac{m^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= m^2c^4 + \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \qquad \bar{p} = \gamma m \bar{v}$$

$$= m^2c^4 + p^2c^2 \qquad p \equiv |\bar{p}|$$

$\Rightarrow$ $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ ns. dispersiorelaatio

Tämä pätee myös $m=0$ tilanteessa:

$m = 0$:

$$E = |\bar{p}|c$$

$$\bar{p} = \frac{E}{c}\hat{p}$$ yksikkövektori

Kurssin A-osalla:

fotonin energia: $E_\gamma = \hbar|\bar{k}|c = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda}c = \frac{hc}{\lambda}$

fotonin liikemäärä $\bar{p}_\gamma = \hbar\bar{k} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda}\hat{p}_\gamma$

$$= \frac{h}{\lambda}\hat{p}_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}\hat{p}_\gamma$$

Epärelativistinen raja $|\bar{p}| \ll mc$:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2} = mc^2 + \frac{1}{2}\frac{|\bar{p}|^2}{m} + \dots$$

$|\bar{p}| = \gamma m|\bar{v}| \ll mc \Rightarrow |\bar{v}| \ll c$ ja $\gamma = 1 + \dots$ eli $|\bar{p}| = m|\bar{v}| + \dots$

$$\Rightarrow \quad E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}m|\bar{v}|^2 \qquad \text{kun } |\bar{p}| \ll mc$$

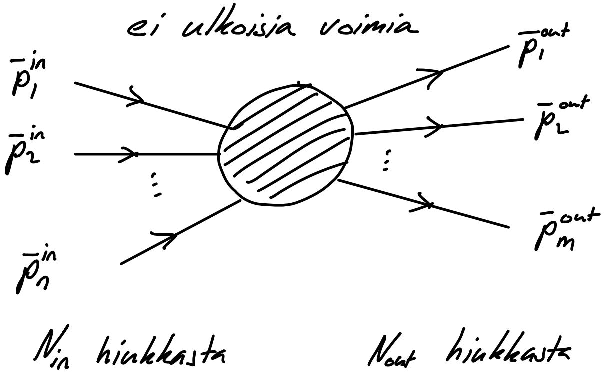
Relativistinen raja $|\bar{p}| \gg mc$:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2} = |\bar{p}|c + \mathcal{O}\left(\frac{m^2c^2}{|\bar{p}|^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E \simeq |\bar{p}|c \qquad \text{kun } |\bar{p}| \gg mc$$

Säilymislait suhteellisuusteoriassa

ei ulkoisia voimia



Energia säilyy:

$$\sum_{i=1}^{N_{in}} \gamma_i m_i c^2 = \sum_{i=1}^{N_{out}} \gamma_i m_i c^2$$

Liikemäärä säilyy:

$$\sum_{i=1}^{N_{in}} \gamma_i m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{N_{out}} \gamma_i m_i \bar{v}_i$$

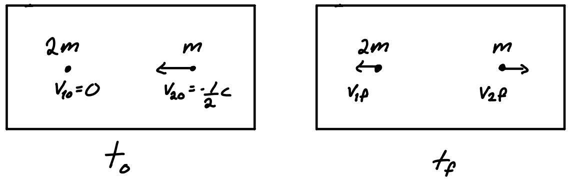
Newtonilaisella rajalla: $E = \gamma m c^2 = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \ldots$

säilyy vain elastisissa törmäyksissä

$E = \gamma m c^2$ sis. kaiken energian (paitsi ulk. potentiaalienergian)

$\Rightarrow$ säilyy aina kun systeemiin ei vaikuta ulk. voimia

Palataan s. 41 esimerkkiin:



Energia ja liikemäärä säilyvät:

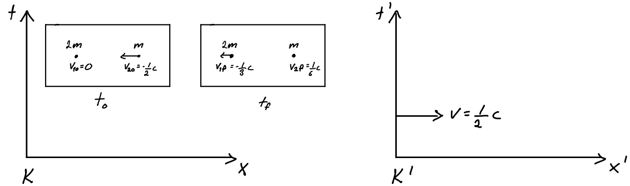
$E = \gamma m c^2 \qquad \bar{p} = \gamma m \bar{v}$

$E_0 = E_f: \qquad 2mc^2 + \gamma_{20} mc^2 = \gamma_{1f} 2mc^2 + \gamma_{2f} mc^2$

$\bar{p}_0 = \bar{p}_f \qquad \gamma_{20} m \bar{v}_{20} = 2m\gamma_{1f}\bar{v}_{1f} + m\gamma_{2f}\bar{v}_{2f}$ Head-on törmäys $\bar{v}_{1f} \propto \bar{v}_{2f}$

$\Rightarrow \quad v_{1f} \simeq -0.35c, \quad v_{2f} \simeq 0{,}18c$

Sama liikkuvan havaitsijan mittaamana:



$$v_{10}' = \frac{v_{10} - v}{1 - \frac{v_{10} v}{c^2}} = -0{,}5c$$

$$v_{20}' = \frac{v_{20} - v}{1 + \frac{v_{20} v}{c^2}} = -0.8c$$

$$v_{1f}' \simeq -0{,}73c$$

$$v_{2f}' \simeq -0{,}35c$$

$E_0 = \gamma_{10} 2mc^2 + \gamma_{20} mc^2 \simeq 4.0\,mc^2$

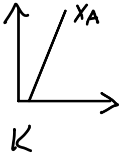
$E_f = \gamma_{1f} 2mc^2 + \gamma_{2f} mc^2 \simeq 4.0\,mc^2$

$p_0 = \gamma_{10} 2m v_{10} + \gamma_{20} m v_{20} \simeq -2{,}5\,mc$

$p_f = \gamma_{1f} 2m v_{1f} + \gamma_{2f} m v_{20} \simeq -2{,}5\,mc$ OK

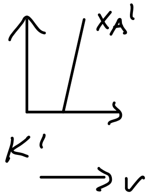
E ja $\bar{p}$ säilyvät K:ssa ja K':ssa

E ja $\bar{p}$ Lorentz-muunnoksissa



$$E_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}\, mc^2$$

$$p_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}\, m v_A$$



$$E_A' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A'^2}{c^2}}}\, mc^2$$

$$p_A' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A'^2}{c^2}}}\, m v_A'$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_A' = \frac{v_A - v}{1 - \frac{v v_A}{c^2}} \overset{(HT)}{\Longrightarrow} \begin{aligned} E_A' &= \gamma(E_A - v p_A) \\ p_A' &= \gamma\left(p_A - \frac{v}{c^2} E_A\right) \end{aligned}$$

E ja $\bar{p}$ riippuvat havaitsijan liiketilasta

Sivulla 47 johdettiin tulos: $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \Rightarrow m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$

Massa m ei riipu havaitsijasta $\Longrightarrow m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2$

Tarkistetaan: $\frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{\gamma^2}{c^2}(E - vp)^2 - \gamma^2\left(p - \frac{v}{c^2}E\right)^2$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2}\left(E^2 - \cancel{2Evp} + v^2p^2\right) - \gamma^2\left(p^2 - \cancel{\frac{2vpE}{c^2}} + \frac{v^2}{c^4}E^2\right)$$

$$= \frac{E^2}{c^2}\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - p^2\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad \text{ok}$$

E ja $\bar{p}$ vs. neliliikemäärä

Sivulla 48 esiteltiin lyhyesti ns. 4-liikemäärä. Menemättä yksityiskohtiin, todetaan tässä lyhyesti, että E ja $\bar{p}$ voidaan identifioida 4-ulotteisen vektorin komponenteiksi:

$$p \equiv \frac{E}{c}\hat{e}_t + p_x\hat{e}_x + p_y\hat{e}_y + p_z\hat{e}_z$$

missä $E = \gamma m c^2$, $p_x = \gamma m v_x$ jne

neliliikemäärä

t, x, y, z -kantavektoreita

Usein merkitään $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$

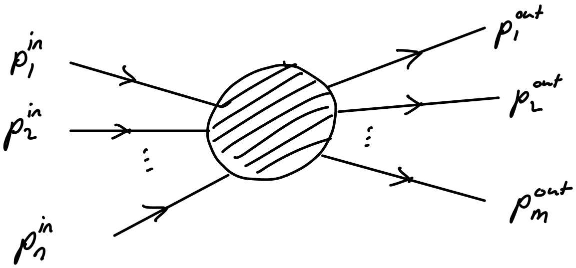
Pistetulon määritelmä eroaa "normaalista":

$$p \cdot p = \left(\frac{E}{c}\right)^2 \underbrace{\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t}_{=1} + p_x^2 \underbrace{\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x}_{=-1} + p_y^2 \underbrace{\hat{e}_y \cdot \hat{e}_y}_{=-1} + p_z^2 \underbrace{\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z}_{=-1} = \frac{E^2}{c^2} - |\bar{p}|^2 = m^2c^2$$

$\Rightarrow$ $p \cdot p = m^2c^2$ Lorentz-invariantti 4-vektorin pituus

E ja $\bar{p}$ vs. neliliikemäärä

4-liikemäärä $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$



$$\sum_{i=1}^{N_{in}} E_i^{in} = \sum_{i=1}^{N_{out}} E_i^{out}$$

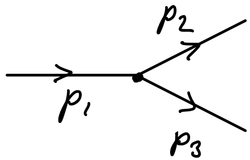
$$\sum_{i=1}^{N_{in}} \bar{p}_i^{in} = \sum_{i=1}^{N_{out}} \bar{p}_i^{out}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N_{in}} p_i^{in} = \sum_{i=1}^{N_{out}} p_i^{out}$$

$E, \bar{p}$ säilyy $\Leftrightarrow$ 4-liikemäärä $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right)$ säilyy

"Invariantti massa" (ks. labratyö: Cern-datan analysointi)

Tarkastellaan esim. 1 → 2 hajoamisreaktiota



$$p_1 = p_2 + p_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_1 = E_2 + E_3 \\ \bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3 \end{cases}$$

$$m_1^2 c^2 = p_1 \cdot p_1 = (p_2 + p_3) \cdot (p_2 + p_3) \quad \Leftrightarrow \quad m_1^2 c^2 = \left(\frac{E_2 + E_3}{c}\right)^2 - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2$$

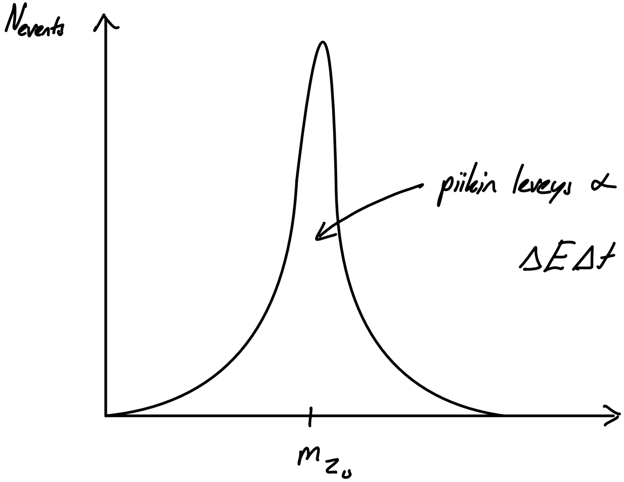
$$\Rightarrow m_1^2 = \frac{1}{c^2} (p_2 + p_3) \cdot (p_2 + p_3) \quad \Leftrightarrow \quad m_1^2 = \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{E_2 + E_3}{c}\right)^2 - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2 \right)$$

"invariantti massa" eli hajoavan hiukkasen massa L-inv. muodossa lopputilan suureiden avulla

Labratyössä tarkastellaan hajoamisreaktiota $Z_0 \to \mu^+, \mu^-$

Z-bosoni — anti-myoni — myoni

(näihin palataan hitufys.-osassa)



piikin leveys $\propto \tau^{-1}$, missä τ hajoavan hiukan elinikä

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \to \Delta E = \Delta M \sim \frac{\hbar}{\tau}$$

$$M_{\mu^+\mu^-} = \frac{\sqrt{(p_{\mu^+} + p_{\mu^-})^2}}{c}$$ inv. massa

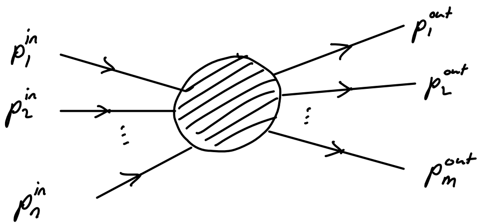
Yhteenveto: energia ja liikemäärä suhteellisuusteoriassa

- Energia: $E = \gamma mc^2 = \underbrace{mc^2}_{= E_0} + \underbrace{(\gamma - 1)mc^2}_{= E_{kin}}$ $\quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

- Liikemäärä: $\bar{p} = \gamma m \bar{v}$

- $E = \sqrt{m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2}$, $m = 0 \Rightarrow E = |\bar{p}|c$

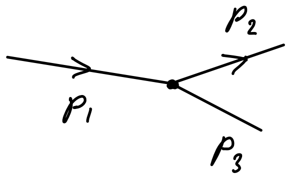
- E ja $\bar{p}$ säilyvät



$E_{in} = E_{out}$

$\bar{p}_{in} = \bar{p}_{out}$

Esim.



$m_2 = m_3 = m$ hiukkasilla 2 ja 3 sama massa

$E_1 = E_2 + E_3$

$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3$

Lorentz-invariantteja ehtoja, voimassa missä tahansa in. koordinaatistossa

$$m_1^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - |\bar{p}_1|^2 = \frac{(E_2 + E_3)^2}{c^2} - |\bar{p}_2 + \bar{p}_3|^2$$

Tarkastellaan tilannetta massakeskipistekoordinaatistossa ($\sum_i \bar{p}_i = 0$)
(Center of Mass (CM) frame)

$E_1 = m_1 c$, $\bar{p}_1 = \bar{0}$ $\qquad$ $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}_2 = -\bar{p}_3 \equiv \bar{p}$

$E_2 = \gamma_2 m c^2$

$$E_3 = \gamma_3 m c^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ |\bar{p}_2| = |\bar{p}_3|}}{\gamma_2} m c^2 = E_2$$

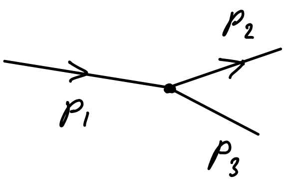
$E_1 = E_2 + E_3 = 2E_2 \equiv 2E$

$$m_1^2c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - |\bar{p}_1|^2 = \frac{(E_2+E_3)^2}{c^2} - |\bar{p}_2+\bar{p}_3|^2$$
$$= \frac{4E^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + |\bar{p}|^2c^2 = \frac{1}{4}m_1^2c^4$$
$$|\bar{p}| = \frac{c}{2}\sqrt{m_1^2 - 4m^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_1 \geq 2m}$$

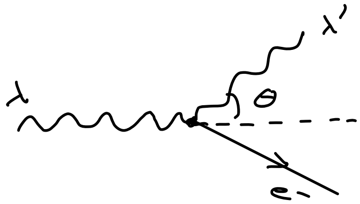
massaton hiukkanen ei voi hajota 2:ksi massalliseksi



Pätee yleisemminkin:

$$m_1 \geq m_2 + m_3$$

Compton-sironta



Fotonien sironta elektroneista:

(γ säteiden vv. aineen kanssa
$\Rightarrow$ materiaalifys., lääketiet. fys., ...)

Compton 1923:

$$\underbrace{\lambda' - \lambda}_{\equiv \Delta\lambda} = \frac{h}{\underbrace{m_e c}}(1-\cos\theta)$$

Aaltokuvassa $\lambda' = \lambda \Rightarrow$ fotonit hiukkasia

$\equiv \lambda_e \simeq 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,m$
elektronin Compton aallonpituus

Johdetaan Comptonin tulos:

LAB-koordinaatisto

$E_e = m_e c^2$, $\bar{p}_e = \bar{0}$ kohde e^-

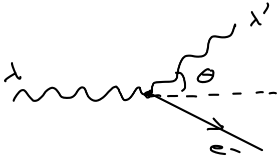
E_e', $\bar{p}_e'$ sironnut e^-

$E_\gamma = |\bar{p}_\gamma| c$, $\bar{p}_\gamma = \bar{p}_\gamma$ saapuva fotoni

$E_\gamma' = |\bar{p}_\gamma'| c$, $\bar{p}_\gamma'$ sironnut γ

$$\left(E_\gamma = \hbar |\bar{k}| c = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} c = \frac{hc}{\lambda}\right)$$

Compton-sironta



$E_e = m_e c^2$, $\bar{p}_e = \bar{0}$ kohde e^- $\qquad$ E_e', $\bar{p}_e'$ sironnut e^-

$E_\gamma = |\bar{p}_\gamma| c$, $\bar{p}_\gamma = \bar{p}_\gamma$ saapuva fotoni $\qquad$ $E_\gamma' = |\bar{p}_\gamma'| c$, $\bar{p}_\gamma'$ sironnut γ

$$\cancel{m_e^2 c^2} = \frac{E_e'^2}{c^2} - |\bar{p}_e'|^2$$

$$= \frac{(E_e + E_\gamma - E_\gamma')^2}{c^2} - |\underbrace{\bar{p}_e}_{=0} + \bar{p}_\gamma - \bar{p}_\gamma'|^2$$

$$= \frac{(m_e c^2 + |\bar{p}_\gamma| c - |\bar{p}_\gamma'| c)^2}{c^2} - |\bar{p}_\gamma - \bar{p}_\gamma'|^2$$

$$= \cancel{m_e^2 c^2} + \cancel{|\bar{p}_\gamma|^2} + \cancel{|\bar{p}_\gamma'|^2} - 2|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'| + 2 m_e c (|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|) - (\cancel{|\bar{p}_\gamma|^2} + \cancel{|\bar{p}_\gamma'|^2} - 2\underbrace{\bar{p}_\gamma \cdot \bar{p}_\gamma'}_{= |\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'| \cos\theta})$$

$$0 = 2|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'|(\cos\theta - 1) + 2 m_e c (|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|)$$

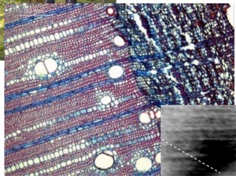
$$1 - \cos\theta = m_e c \frac{(|\bar{p}_\gamma| - |\bar{p}_\gamma'|)}{|\bar{p}_\gamma||\bar{p}_\gamma'|} \qquad |\bar{p}_\gamma| = \frac{h}{\lambda}$$

$$= m_e c \left(\frac{\lambda'}{h} - \frac{\lambda}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad \Delta\lambda \sim \lambda_e \sim 10^{-12}\,\mathrm{m}, \text{ merkityksetön jos } \lambda \gg 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

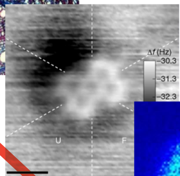
Monimutkaisuus koostuu yksinkertaisista osista

1 m



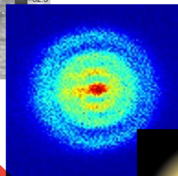
Solu

10^{-4} m



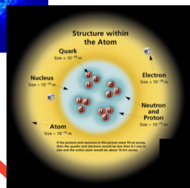
Molekyyli

10^{-9} m



Atomi

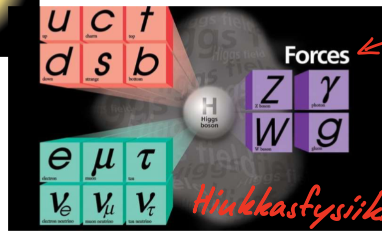
10^{-10} m



Atomiydin

10^{-15} m

Alkeishiukkaset



Monimutkaisuus kasvaa

Energiatiheys kasvaa

Kemia/nanofysiikka

Ydinfysiikka

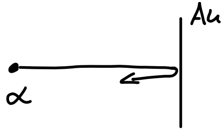
Hiukkasfysiikka

vahva vv.
heikko vv.
sähkömag. vv.
+ gravitaatio

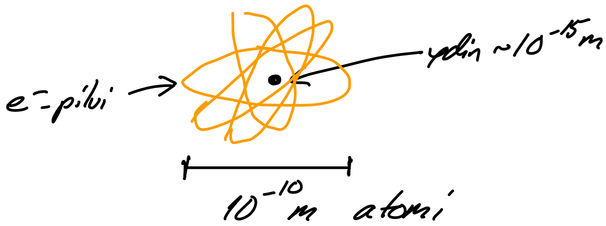
Kaikki luonnonlait palautuvat lopulta alkeishiukkasten ominaisuuksiin!

Ydinfysiikkaa

- Rutherford 1909



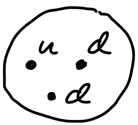
$\Rightarrow$ Atomin massa keskittynyt pos. varattuun ytimeen



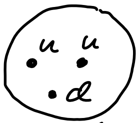
- Ydin koostuu nukleoneista: neutroni n, ei sähkövarausta $Q_n = 0$

  protoni p^+, pos. varaus $Q_p = +e$

- Nukleonit koostuvat edelleen kvarkeista = alkeishiukkasia



neutroni



protoni

Kvarkeilla sähkövaraus $Q_u = \frac{2}{3}e$, $Q_d = -\frac{1}{3}e$

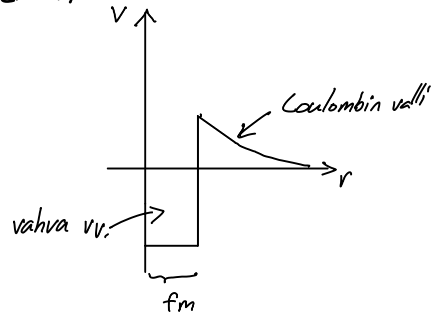
ja ns. värivaraus $\Rightarrow$ vahva vuorovaikutus

- Vahva vuorovaikutus pitää nukleonit koossa eli sitoo kvarkit protoneiksi ja neutroneiksi (Quantum Chromo Dynamics = QCD)
- Vahva vv. $\Rightarrow$ attraktiivinen residuaalivoima n ja p^+ välillä, pitää ytimet koossa

  lyhyt kantama $\lesssim$ fm $= 10^{-15}$ m
- Positiivisesti varattujen p^+ välillä myös repulsiivinen Coulombin voima, pyrkii hajottamaan ytimiä

  $\Rightarrow$ hyvin monimutkainen monen kappaleen kvanttisysteemi
- Käytännössä ei osata ratkoa eksaktisti, vaikka teoria tunnetaan

  $\Rightarrow$ efektiivisiä malleja



- Ydinfysiikka luonnossa / sovelluksissa:

  radioaktiivisuus, aurinko, nukleosynteesi, ydinvoima, lääketiet. fys., näytteiden iän/koostumuksen määritys...

Nimityksiä

Z = atomin järjestysluku eli protonien lkm. ytimessä = elektronien lkm.

N = neutroniluku eli neutronien lkm. ytimessä

Z määrää kemialliset ominaisuudet

$A = Z + N$ = massaluku eli nukleonien lkm. ytimessä

Merkintä: $\boxed{{}^{A}_{Z}X_{N} \text{ tai } {}^{A}_{Z}X \text{ tai } {}^{A}X}$

X = alkuaineen nimi

esim. ${}^{13}_{6}C_{7}$

Nuklidi = ${}^{A}_{Z}X_{N}$ ydin, jolla tietty Z ja N

Isotoopit = nuklideja, joilla sama Z mutta eri N

esim. ${}^{12}_{6}C_{6}$ ja ${}^{13}_{6}C_{7}$

sama kemia $\Rightarrow$ sama alkuaine
eri ydinfysiikka

Nukleonien massat

$$M_{atomi} \simeq M_{ydin} + Zm_e \simeq A \cdot u$$

taulukoista

pieni

atomimassayksikkö:

$$u = 931{,}49 \,\frac{MeV}{c^2} \equiv \frac{1}{12} M_{^{12}C}$$

$$m_p = 938{,}28 \, MeV/c^2 = 1{,}00728 \, u$$

$$m_n = 939{,}57 \, MeV/c^2 = 1{,}00866 \, u$$

$$m_e = 0{,}511 \, MeV/c^2 = 5{,}49 \cdot 10^{-4} u \ll m_p, n_n$$

$m_p \simeq m_n$, keskeinen ehto elämälle!

$m_p \to (1 \pm 0{,}01) m_p$ → ei atomeja

→ ei tähtiä