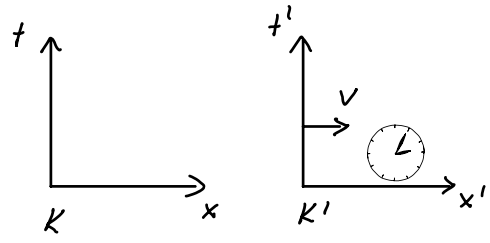


Aikadilaatio



K' issa paikallaan $\Delta x' = 0$ olevassa kellossa kuluu aika $\Delta t'$

Mikä on vastaava ajanjakso K :ssa?

Lorentz -muunnos :

$$\left. \begin{aligned} \Delta t' &= \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \\ \Delta x' &= \gamma (\Delta x - v \Delta t) = 0 \Rightarrow \Delta x = v \Delta t \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta t' = \gamma^{-1} \Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$$

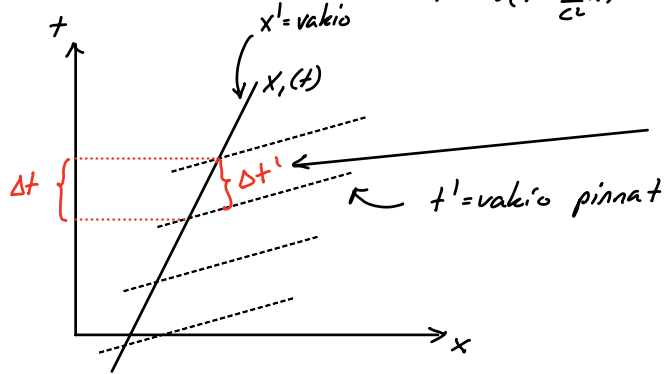
Liikkuva kello jätättää suhteessa paikallaan olevaan $\Delta t' < \Delta t$!

Näkyä esim. GPS - satelliitteissa ja lennätettäessä atomikelloja lentokoneella maapallon ympäri ($\Delta t_{maa} - \Delta t'_{kello} \sim 10^{-7} s$)

Aikadilaatio

Kellon rata K:issa

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) & x &= \gamma(x' + vt') \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) & t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned}$$



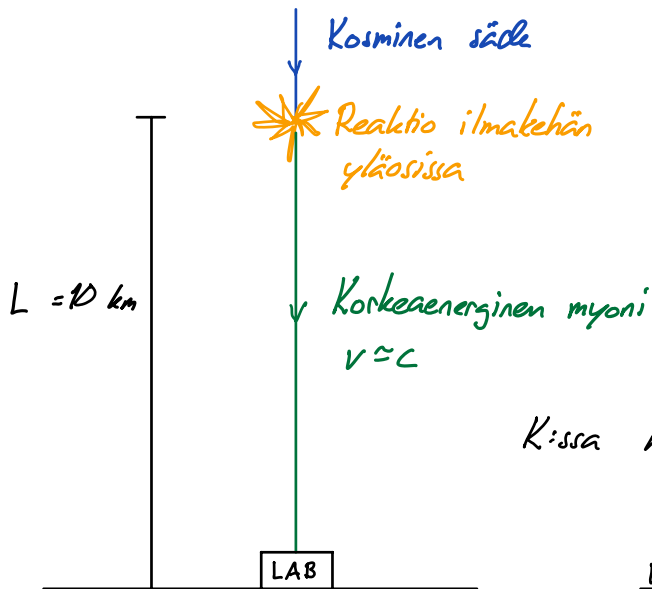
$$\Delta t' = \gamma^{-1} \Delta t < \Delta t$$

$\Delta x' = 0$

Esim.

Myönit uudestaan

Myönnin elinaika lepokoordinaatistossa $\tau_0' = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ (24)



Olk. K LAB koord. ja K' myönnin lepokoord.

$$\Delta t' = \tau_0', \quad \text{aikadilaatio } \Delta t' = \gamma^{-1} \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t \equiv \tau_0 = \gamma \tau_0' = \frac{\tau_0'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

K :ssa myönni ehtii kulkea matkan $v \tau_0 = \frac{v \tau_0'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > v \tau_0'$

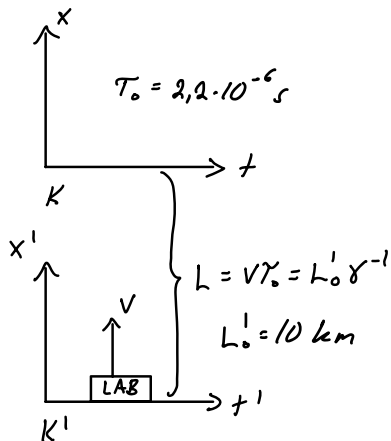
$$\frac{v \tau_0'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq L \Rightarrow v \geq 0,998c$$

Sama tulos kuin s. 21 laskussa

Myonesimerkin yhteenvedo:

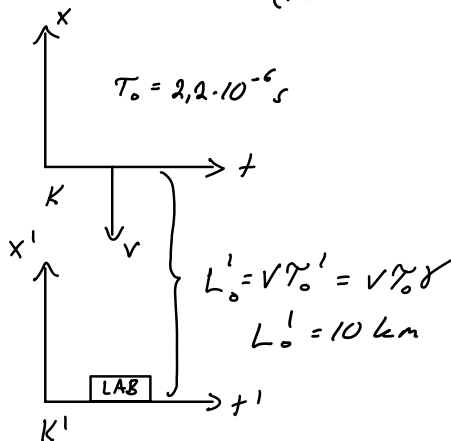
25

Myonin lepokoordinaatissa



LAB lepokoordinaatissa

(HWDH: eri notatio kuin s. 24)



Suhteellinen nopeus sama molemmissa tilanteissa:

$$v = \frac{L}{T_0} = \frac{L_0'}{\gamma T_0}$$

$$v = \frac{L_0'}{T_0'} = \frac{L_0'}{\gamma T_0}$$

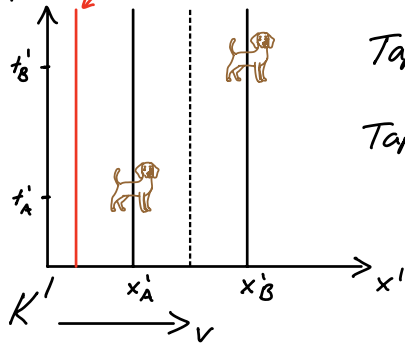
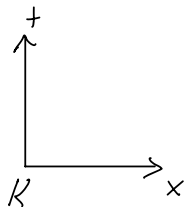
ajan ja paikan käsitteet riippuvat havaitsijasta

Varoittava esimerkki aikadilatation kaavan soveltamisesta:

25.1

Koira ylittää tien K' :n lepokoordinaatistossa

t' havaittajan K' rata $x' = \text{vakio}$



Tapahtuma A: (t'_A, x'_A) "koira alittaa tien ylityksen"

Tapahtuma B: (t'_B, x'_B) "koira ylittänyt tien"

Ylitysaika K' :n mittamassa:

$$\text{Aikadilatatio} \Rightarrow \Delta t = \gamma(t'_B - t'_A) \quad ? \quad \underline{\underline{EI}}$$

ylitysaika = tapahtumien A ja B aikaero K' :ssa, $x'_A \neq x'_B$ joten aikadilatation kaavaa ei voi soveltaa

$$\text{Lorentz-muunnos:} \quad \begin{aligned} t &= \gamma(t' + \frac{v x'}{c^2}) \\ x &= \gamma(x' + v t') \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad t_B - t_A = \gamma(t'_B - t'_A + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A))$$

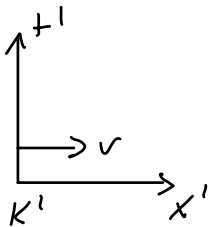
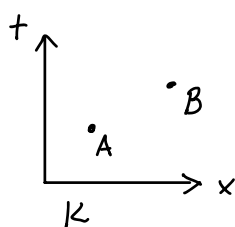
Aika-avaruuden pituuselementit:

Edellä nähtiin, että tapahtumien aika- ja paikkaerot Δt ja Δx eivät ole absoluuttisia, vaan riippuvat havaitsijasta.

Lorentz-muunnoksista kuitenkin seuraa (HT):

$$\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$$

↑
määrittelee 4-ulotteisen aika-avaruuden (t, x, y, z) pituuselementin, kaikkien inertiaaliharaitisijain mittaavat saman Δs^2 :n



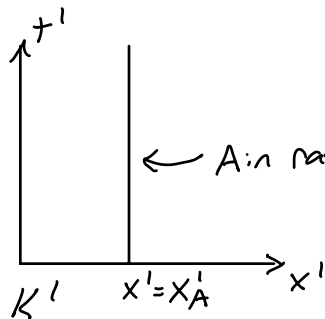
$$\begin{aligned} \Delta s_{AB}^2 &= c^2 (t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 \\ &= c^2 (t'_B - t'_A)^2 - (x'_B - x'_A)^2 \end{aligned}$$

⇒ vihdoin jokin absoluuttista! ✓

Itseisaika (proper time)

ΔS^2 :n absoluuttisuutta voidaan hyödyntää kun halutaan laskea annettua rataa kulkevan havaitsijan kellossa kulua aika.

Havaitsijan A kellossa kulua aika = A:n lepokoordinaatiston aika
 \equiv A:n itseisaika τ



← A:n rata omassa lepokoordinaatistossaan K'

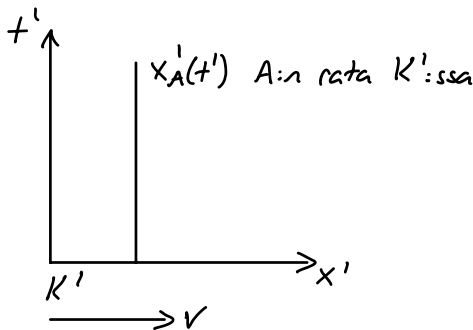
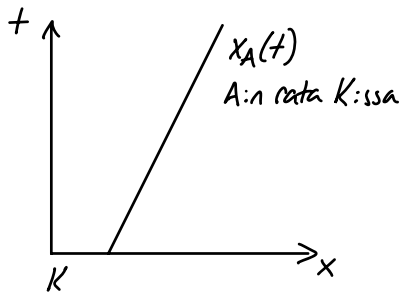
ΔS_A^2 A:n rataa pitkin:

$$\Delta S_A^2 \equiv c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x_A')^2 = c^2(\Delta t')^2$$

$$\Rightarrow \Delta \tau_A = \Delta t' = \sqrt{\frac{\Delta S_A^2}{c^2}}$$

Iteisaika (proper time)

Kirjoitetaan A:n ΔT toisessa inertiaalikoordinaatistossa K'



$$(\Delta S_A)^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta X_A^2$$

$$(\Delta S'_A)^2 = c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta T_A^2$$

Koska $(\Delta S_A)^2 = (\Delta S'_A)^2$, saadaan
$$\Delta T_A = \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta X_A^2}{\Delta t^2}} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^{-1} \Delta t$$

tuttu aikadilataatio

⇒ Kätevä laskukeino: havaitsijan mitteama aika saadaan laskemalla ΔS^2 havaitsijan ratan pitkein missä tahansa koordinaatistossa.

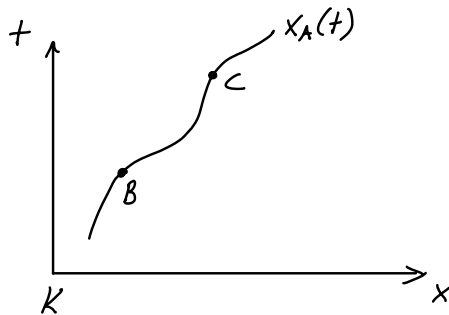
Itseisaika (proper time)

Saatiin siis tulos: $\Delta\tau^2 = \frac{\Delta s^2}{c^2}$

(29)

Tämä pätee myös differentiaalisena ja myös kiihtyvässä liikkeessä olevalle kappaleelle

Itseisaika $d\tau \equiv \frac{ds^2}{c^2}$



A:n kellossa kulunut aika tapahtumien B ja C välillä:

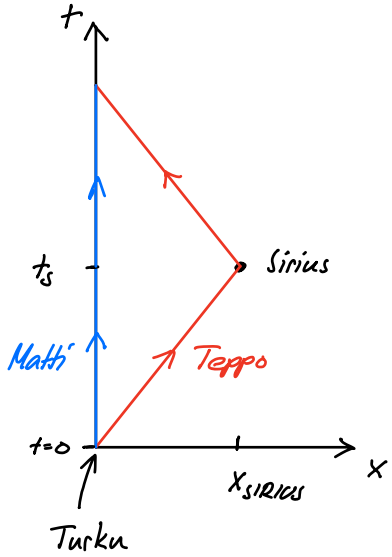
$$\tau_{BC} = \int_B^C \frac{ds}{c} = \int_{t_B}^{t_C} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx_A^2} = \int_{t_B}^{t_C} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2}$$

τ määritelty kun $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left|\frac{dx}{dt}\right| \leq c$

Kun $\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow d\tau = 0 \Rightarrow$ nopeudella c liikkuvan kappaleen aika pysähtyy

Esim. kaksosparadoksi

Matti jää Turkuun ja Teppo lähtee kohti Siiuusta



Tepon raketti kulkee nopeudella $v = 0,8c$

Matka Siiuukseen $x_s = 8 \text{ ly}$ ← valovuosi = lightyear
 $= 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ y}$
 $\approx 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}$

$$t_s = \frac{8 \text{ ly}}{0,8c} = 10 \text{ y}$$

Matin mielestä Tepon kello jätättää

$$\Delta t'_{\text{Teppo}} = \Delta t_{\text{Matti}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,6 \Delta t_{\text{Matti}}$$

Tepon mielestä Matin kello jätättää

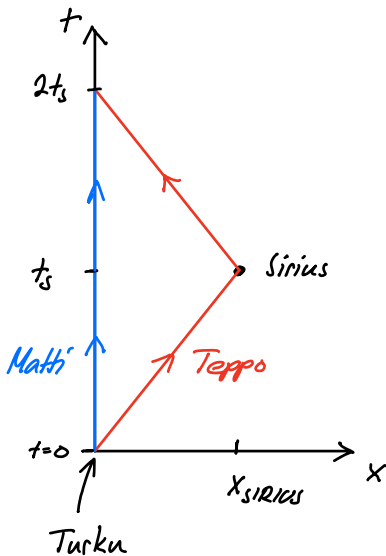
$$\Delta t'_{\text{Matti}} = \Delta t_{\text{Teppo}} \sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}} = 0,6 \Delta t_{\text{Teppo}}$$

Kumman kello näyttää enemmän kun Teppo palaa?

Havaitsijan kokema aika = itseisaika

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} \quad (\text{Lorentz-inv.}) \quad (dy=dz=0)$$

(31)



Matti:

$$x_M(t) = 0$$

$$\tau_M = \int_{\tau_{\text{LÄHTÖ}}}^{\tau_{\text{PALUU}}} dt = \int_0^{2t_s} dt = 2t_s = 20 \text{ y}$$

Teppo:

$$x_T(t) = \begin{cases} vt & , t < t_s \\ vt_s - v(t-t_s) & , t > t_s \end{cases}$$

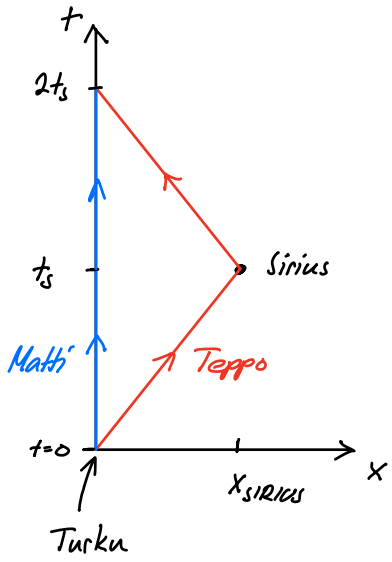
$$\tau_T = \int_{\tau_{\text{LÄHTÖ}}}^{\tau_{\text{PALUU}}} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx_T^2}{dt^2}}$$

$$\tau_T = \int_0^{t_s} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \int_{t_s}^{2t_s} dt \sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}} = 12 \text{ y}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0,6} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0,6}$

⇒ Teppo ikääntyy vähemmän

Mikä erottaa Tepon Matista?

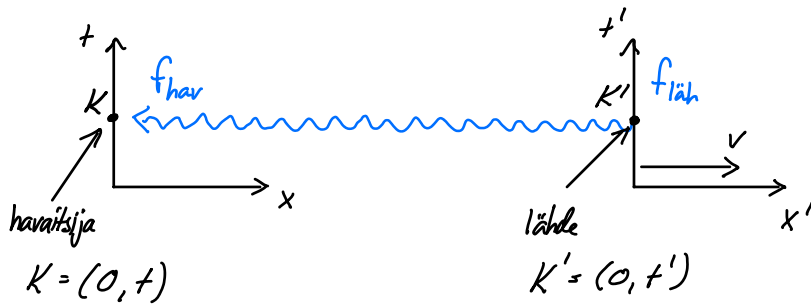


Matti pysyy koko ajan samassa in. koord.:ssa
 ⇒ Matti ei koe kiihtyvyyksiä

Teppo vaihtaa in. koordinaatista $v \rightarrow -v$
 ⇒ Teppo kokee kiihtyvyyden

Inertiaalihavaintajan aika kulkee nopeammin !

Dopplerin ilmiö K' lähettää valonsäteen taajuudella $f_{läh}$, mikä on f_{hav} K :ssa?



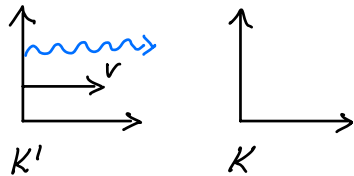
lähteen paikka K :ssa hetkellä t

Valitaan koordinaatit s.e. $X_{K'}(t=0) = 0 \Rightarrow X_{K'}(t) = vt$

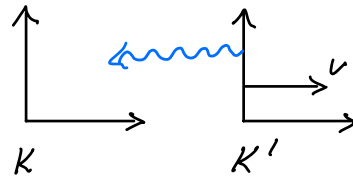
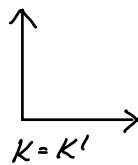
$t < 0$

$t = 0$

$t > 0$



lähenevä lähde

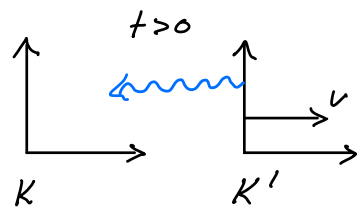


loittoneva lähde

K:ssa:

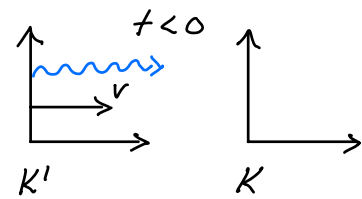
- Etäisyys lähteeseen:

$$x_{KK'}(t) = \underbrace{|x_{K'}(t) - x_K(t)|}_{=vt} = \underbrace{v|t|}_{=0}$$



- K' emittii fotonin (x, t) pisteessä A:

$$(x_{K'}(t_A), t_A) = (vt_A, t_A)$$



- K vastaanottaa fotonin pisteessä B:

$$(x_K(t_B), t_B) = (0, t_B)$$

- Fotonin kulkema matka = $x_{KK'}(t_A)$:

$$x_{KK'}(t_A) = v|t_A| = c(t_B - t_A)$$

nopeus c , matkaan kuluu aika $t_B - t_A$

$$t_B = t_A + \frac{v}{c}|t_A|, \quad \frac{v}{c} \equiv \beta$$

$$\Rightarrow \underline{t_B = t_A(1 \pm \beta)} \quad \begin{array}{l} + \text{ loittoneva lähde} \\ - \text{ lähenevä lähde} \end{array}$$

- K saa signaalin hetkellä $t_B = t_A (1 \pm \beta)$ + loittoneva lähde
- lähenevä lähde

- Lähetyspistettä A: (vt_A, t_A) vastaava ajanhetki K' :ssa:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}(vt_A)\right) = \frac{t_A}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 - \beta^2) = t_A \sqrt{1-\beta^2}$$

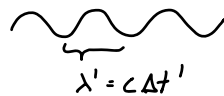
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- Näistä saadaan:

$$t_B = t_A (1 \pm \beta) = \frac{t'_A}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 \pm \beta) = \frac{t'_A (1 \pm \beta)}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = t'_A \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}$$

loittoneva: ylempät merkit
lähenevä: alemmat merkit

- Lähteen koordinaateissa lähetetyn valon aallonpituus on λ' .



Yhden jakson emittoimiseen kuluu aika $\Delta t'_{\text{leh}} = \frac{\lambda'_{\text{leh}}}{c}$

\Rightarrow K havaitsee vastaavasti jakson

$$\Delta t_{\text{hav}} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \Delta t'_{\text{leh}}$$

loittoneva
lähenevä

• Taajuus on määritelmän mukaan $f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{c}{\lambda}$

• Tuloksesta $\Delta t_{hav} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \Delta t'_{läh}$ loittoneva lähenevä saadaan siis

\Rightarrow $f_{hav} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f_{läh}$ loittonevalle lähteelle $(\beta \equiv \frac{v}{c})$

$f_{hav} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} f_{läh}$ lähestyvälle lähteelle

Suhteellisuusteoreettinen Doppler-ilmiö

Ekspansoidaan pienten nopeuksien rajalla $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$, loittonevalle lähtelle:

$$f_{\text{hav}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_{\text{ih}}$$

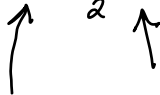
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$= ((1-\beta)(1-\beta+\beta^2+\mathcal{O}(\beta^3)))^{1/2} f_{\text{ih}}$$

$$= (1-2\beta+\beta^2+\beta^2+\mathcal{O}(\beta^3))^{1/2} f_{\text{ih}}$$

$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$= (1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^3)) f_{\text{ih}}$$

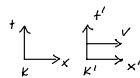


Newtonilainen
Doppler-ilmiö

johtava suhteellisuusteorian korjaukseen

Kertaus: Lorentz-muunnosten fysiikkaa

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$



- Aikadilaatio:

$$\Delta t' = \gamma^{-1} \Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$$

Liikkuva kello jätättää
(suhteessa paikallaan olevaan)

- Pitäuskontraktio:

$$l = \gamma^{-1} l_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0$$

Liikkuva sauva lyhenee
(suhteessa paikallaan olevaan)

- Kausaalisuus: $\frac{dx}{dt} \leq c$ kaikille fyysikaalisille prosesseille

- Nopeuksien yhteenlasku:

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$\leq c$ aina

Kertaus: Lorentz-muunnosten fysiikkaa

- $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$

- Itseisaika:

$$d\tau = \frac{ds}{c}, \quad ds^2 > 0$$

- Doppler-ilmiö:

$$f_{hav} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_{läh}$$

loittonevalle lähteelle

$$\left(\beta \equiv \frac{v}{c}\right)$$

$$f_{hav} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_{läh}$$

lähestyvälle lähteelle

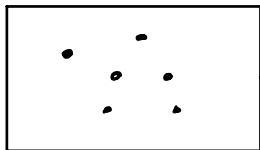
Mitä tapahtuu Newtonin laeille?

- Lorentz-muunnos: $F = m \frac{d^2 x}{dt^2} \rightarrow m \frac{d^2 x'}{dt'^2}$
- Fysiikan lakien oltava invariantteja Lorentz-muunnoksissa
 - \Rightarrow Newtonin lakeja täytyy muokata
 - \Rightarrow energian ja liikemäärän määritelmät muuttuvat !

Liikemäärä suhteellisuusteoriassa

• Newtonin fysiikassa $\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

• Ei ulkajaisia voimia $\vec{F}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{vakio}$



$\vec{F}_{tot} = \vec{0}$

liikemäärä säilyy

N kpl:n systeemi

• Vaaditaan liikemäärän säilyminen myös suhteellisuusteoriassa

Tarkastellaan elastista törmäystä Newtonin fysiikassa:

$E_0 = E_p : \frac{1}{2} m v_{20}^2 = \frac{1}{2} 2m v_{1p}^2 + \frac{1}{2} m v_{2p}^2$

$v_{20}^2 = 2v_{1p}^2 + v_{2p}^2$

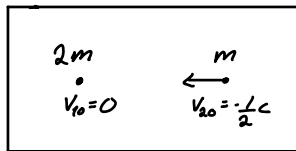
$\vec{p}_0 = \vec{p}_p : m\vec{v}_{20} = 2m\vec{v}_{1p} + m\vec{v}_{2p}$

$\vec{v}_{20} = 2\vec{v}_{1p} + \vec{v}_{2p}$

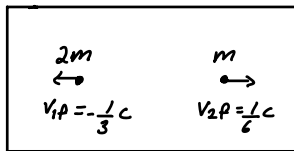
$\Rightarrow v_{20}^2 = 4v_{1p}^2 + v_{2p}^2 + 4\vec{v}_{1p} \cdot \vec{v}_{2p} = 2v_{1p}^2 + v_{2p}^2$

$\Rightarrow \vec{v}_{1p} \cdot \vec{v}_{2p} = v_{1p} v_{2p} \cos\theta = -\frac{1}{2} v_{1p}^2 \Rightarrow \vec{v}_{2p} = -\frac{\vec{v}_{1p}}{2}$ (head-on törmäys)

$\Rightarrow \vec{v}_{1p} = \frac{2}{3} \vec{v}_{20}$, $\vec{v}_{2p} = -\frac{1}{3} \vec{v}_{20}$

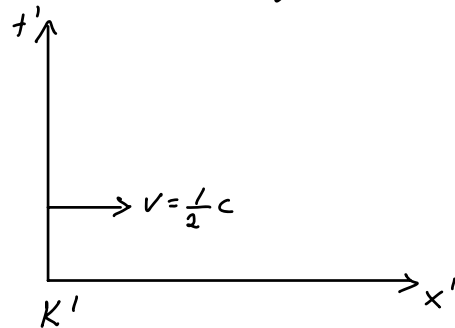
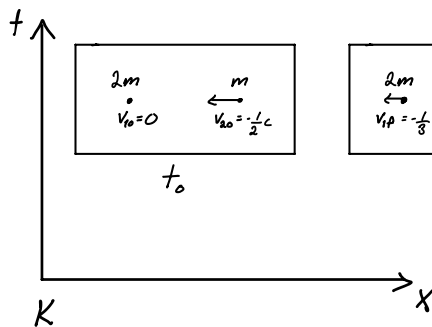


t_0



t_p

Edellisen sivun tilanne nopeudella $v = \frac{1}{2}c$ liikuvan havaitsijan silmin



Sovelletaan s. 18 johdettua nopeuksien yhteenlaskukaavaa, nopeudet K' :ssa:

$$v'_{10} = \frac{v_{10} - v}{1 - \frac{v_{10}v}{c^2}} = -\frac{1}{2}c$$

$$v'_{20} = \frac{v_{20} - v}{1 - \frac{v_{20}v}{c^2}} = \frac{-\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}c$$

$$v'_{1f} = -\frac{5}{7}c$$

$$v'_{2f} = -\frac{4}{11}c$$

newtonilaiset liikemäärät:

$$p'_{10} + p'_{20} = 2m v'_{10} + m v'_{20} = -\frac{9}{5}mc$$

$$p'_{1f} + p'_{2f} = 2m v'_{1f} + m v'_{2f} = -\frac{138}{77}mc$$

$\Rightarrow \bar{p} = m\bar{v}$ ei säily K' :ssa

Suhteellisuusteoriassa liikemäärä \bar{p} määritellään

$$\bar{p} \equiv \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\bar{v}$$

$\bar{p} \rightarrow m\bar{v}$ kun $v \rightarrow 0$

palautuu Newtonin fysiikkaan rajalla $v \ll c$

Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\bar{v}) = 0$$

Tässä $m \neq 0$, palataan $m=0$ tilanteeseen myöhemmin.

Syventävää taustaa

Newtonin fysiikassa $\bar{p} = m\bar{v} = m \frac{d\bar{x}}{dt} = m \left(\frac{dx}{dt} \hat{e}_x + \frac{dy}{dt} \hat{e}_y + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z \right)$

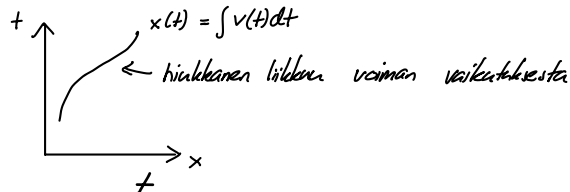
Suhteellisuusteoriassa $\rho \equiv m \frac{d\bar{x}}{d\tau} = m \left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right) = (m\gamma c, m\gamma \bar{v})$ 4-vektori

$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right|^2} = dt \gamma^{-1}$ itseisaika $\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \text{vakio}$ $\bar{v} = \text{vakio}$ \bar{p} on 4-vektorin ρ paikkaosa

Energia suhteellisuusteoriassa

Newtonin 2. laki yleistyy suhteellisuusteoriaan muodossa $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$

Energia \equiv voiman tekemä työ



$$\begin{aligned}\Delta E &= \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{d}{dt} (\gamma m v) dx = \int_0^v \frac{d}{dt} (\gamma m v) v dt & dx = v dt \\ &= \int_0^v dv \left(\frac{d}{dv} (\gamma m v) \right) v \\ &= \int_0^v \gamma m v^2 - \int_0^v dv \gamma m v & \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \gamma m v^2 + m c^2 \gamma^{-2} - m c^2 & \Rightarrow E - E_0 = m c^2 \gamma - m c^2 \\ &= m c^2 (\gamma - 1) & \text{Asetetaan } E_0 = m c^2 \\ & & \Rightarrow E = m c^2 \gamma\end{aligned}$$

Energia suhteellisuusteoriassa

45

Nopeudella v liikkuvan kappaleen kokonaisenergia on siis

$$E = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$E \rightarrow \infty$ kun $v \rightarrow c$

$\Rightarrow m \neq 0$ kappaletta ei voi kiihdyttää nopeuteen $v=c$ äärellisellä työllä!

Lepoenergia $v=0$: $E_0 = mc^2 \Rightarrow$ massa = energia! ∇

Esim. $n \rightarrow p^+ + e^- + \nu_e$ massa \rightarrow kin.energia

Kineettinen energia: $E_{kin} = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$

Rajalla $v \ll c$: $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$

\uparrow
irelevantti vakio N:n fysiikassa

Esim. Mikä on $m=1\text{ kg}$ massaisen kappaleen lepoenergia?

$$E_0 = mc^2 = 1\text{ kg} \cdot (3.00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ J} = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ Wh} = \underline{25 \text{ TWh}} \quad !$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = \frac{1}{3600} \text{ Wh}$$

vrt. Olkilotto $\sim 15 \text{ TWh/vuosi}$

Massan muuttama oleva energia hyvin suuri!

Energian lausekkeesta $E = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ seuraa:

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^4 + \frac{m^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= m^2c^4 + \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \quad \bar{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$= m^2c^4 + p^2 c^2 \quad p \equiv |\bar{p}|$$

$\Rightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ ns. dispersiorelaatio

Tämä pätee myös $m=0$ tilanteessa:

$m=0$;
 $E = |\bar{p}|c$
 $\bar{p} = \frac{E}{c} \hat{p}$ \nwarrow yksikkövektori

Epärelativistinen raja $|\vec{p}| \ll mc$:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} = mc^2 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}|^2}{m} + \dots$$

$$|\vec{p}| = \gamma m |\vec{v}| \ll mc \Rightarrow |\vec{v}| \ll c \quad \text{ja} \quad \gamma = 1 + \dots \quad \text{eli} \quad |\vec{p}| = m |\vec{v}| + \dots$$

$$\Rightarrow E \approx mc^2 + \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \quad \text{kun} \quad |\vec{p}| \ll mc$$

Relativistinen raja $|\vec{p}| \gg mc$:

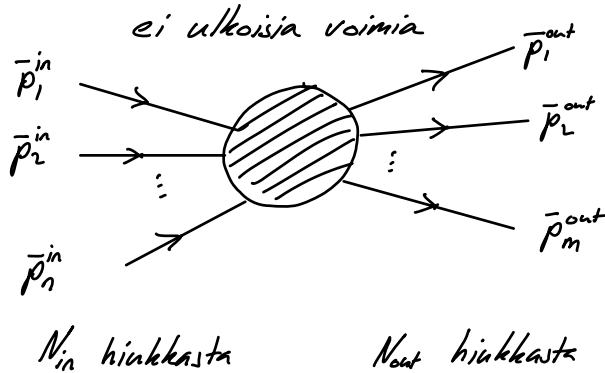
$$E = \sqrt{m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} = |\vec{p}| c + \mathcal{O}\left(\frac{m^2 c^2}{|\vec{p}|}\right)$$

$$\Rightarrow E \approx |\vec{p}| c \quad \text{kun} \quad |\vec{p}| \gg mc$$

Säilymlait suhteellisuusteoriassa

49

ei ulkoisia voimia



Energia säilyy:

$$\sum_{i=1}^{N_{in}} \gamma_i m_i c^2 = \sum_{i=1}^{N_{out}} \gamma_i m_i c^2$$

Liikemäärä säilyy:

$$\sum_{i=1}^{N_{in}} \gamma_i m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N_{out}} \gamma_i m_i \vec{v}_i$$

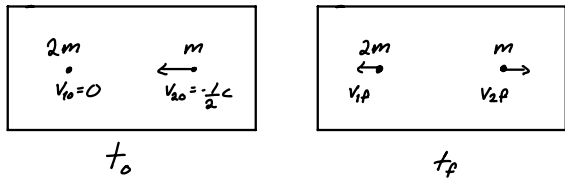
Newtonilaisella rajalla: $E = \gamma m c^2 = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$

↖ säilyy vain elastisissa törmäyksissä

$E = \gamma m c^2$ sis. kaiken energian (paitsi ulk. potentiaalienergian)

⇒ säilyy aina kun systeemiin ei vaikuta ulk. voimia

Palataan s. 41 esimerkkiin:



Energia ja liikemäärä säilyvät:

$$E = \gamma mc^2 \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$E_0 = E_f: \quad 2mc^2 + \gamma_{20} mc^2 = \gamma_{1f} 2mc^2 + \gamma_{2f} mc^2$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \quad \gamma_{20} m \vec{v}_{20} = 2m \gamma_{1f} \vec{v}_{1f} + m \gamma_{2f} \vec{v}_{2f} \quad \text{Head-on törmäys} \quad \vec{v}_{1f} \propto \vec{v}_{2f}$$

$$\Rightarrow v_{1f} \approx -0.35c, \quad v_{2f} \approx 0.19c$$

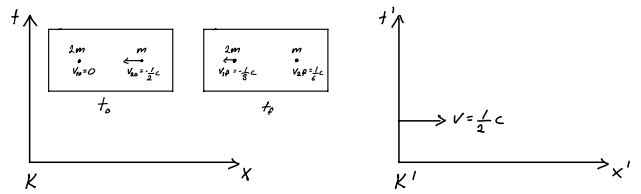
Sama liikkuvan havaitsijan mittamana:

$$v'_{10} = \frac{v_{10} - v}{1 - \frac{v_{10}v}{c^2}} = -0.5c$$

$$v'_{20} = \frac{v_{20} - v}{1 + \frac{v_{20}v}{c^2}} = -0.8c$$

$$v'_{1f} \approx -0.73c$$

$$v'_{2f} \approx -0.35c$$



$$E_0 = \gamma_{10} 2mc^2 + \gamma_{20} mc^2 \approx 4.0 mc^2$$

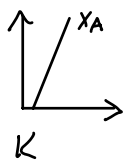
$$E_f = \gamma_{1f} 2mc^2 + \gamma_{2f} mc^2 \approx 4.0 mc^2$$

$$p_0 = \gamma_{10} 2mv_{10} + \gamma_{20} mv_{20} \approx -2.5 mc$$

$$p_f = \gamma_{1f} 2mv_{1f} + \gamma_{2f} mv_{2f} \approx -2.5 mc \quad \text{OK}$$

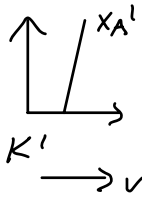
E ja p säilyvät K:ssa ja K':ssa

E ja \vec{p} Lorentz -muunnoksissa



$$E_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} mc^2$$

$$p_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} m v_A$$



$$E_A' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A'^2}{c^2}}} mc^2$$

$$p_A' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A'^2}{c^2}}} m v_A'$$

$$v_A' = \frac{v_A - v}{1 - \frac{v v_A}{c^2}}$$

(HT)

 \Rightarrow

$$E_A' = \gamma (E_A - v p_A)$$

$$p_A' = \gamma (p_A - \frac{v}{c^2} E_A)$$

E ja \vec{p} riippuvat havaitsijan liikebilasta

Sivulla 47 johdettiin tulos: $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \Rightarrow m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$

Massa m ei riipu havaitsijasta $\Rightarrow m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2$

Tarkistetaan: $\frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{\gamma^2 (E - v p)^2}{c^2} - \gamma^2 (p - \frac{v}{c^2} E)^2$

$$= \frac{\gamma^2}{c^2} (E^2 - 2E v p + v^2 p^2) - \gamma^2 (p^2 - \frac{2v p E}{c^2} + \frac{v^2}{c^4} E^2)$$

$$= \frac{E^2}{c^2} \gamma^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) - p^2 \gamma^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad \text{OK}$$

E ja p vs. neliliikemäärä

Sivulla 48 esiteltiin lyhyesti ns. 4-liikemäärä. Menemättä yksityiskohtiin, todetaan tässä lyhyesti, että E ja p voidaan identifioida 4-ulotteisen vektorin komponenteiksi:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{neliliikemäärä}}}{\mathbf{p}} \equiv \frac{E}{c} \hat{e}_t + p_x \hat{e}_x + p_y \hat{e}_y + p_z \hat{e}_z \quad \text{missä} \quad \begin{matrix} E = \gamma mc^2 \\ p_x = \gamma mv_x \\ \text{jne} \end{matrix}$$

\nwarrow \nearrow \nearrow \nwarrow
 t, x, y, z -kantavektoreita

Usein merkitään $p = (\frac{E}{c}, \bar{p})$

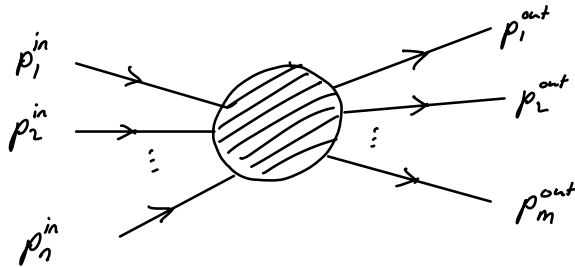
Pistetulon määritelmä eroaa "normaalista":

$$p \cdot p = \left(\frac{E}{c}\right)^2 \underbrace{\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t}_{=1} + p_x^2 \underbrace{\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x}_{=-1} + p_y^2 \underbrace{\hat{e}_y \cdot \hat{e}_y}_{=-1} + p_z^2 \underbrace{\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z}_{=-1} = \frac{E^2}{c^2} - |\bar{p}|^2 = m^2 c^2$$

$\Rightarrow p \cdot p = m^2 c^2$ Lorentz-invariantti 4-vektorin pituus

E ja \bar{p} vs. neliliikemäärä

4-liikemäärä $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p} \right)$

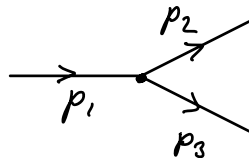


$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_{in}} E_i^{in} &= \sum_{i=1}^{N_{out}} E_i^{out} \\ \sum_{i=1}^{N_{in}} \bar{p}_i^{in} &= \sum_{i=1}^{N_{out}} \bar{p}_i^{out} \end{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N_{in}} p_i^{in} = \sum_{i=1}^{N_{out}} p_i^{out}$$

E, \bar{p} säilyy \Leftrightarrow 4-liikemäärä $p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p} \right)$ säilyy

"Invariantti massa" (ks. labratyö: Cern-datan analysointi)

Tarkastellaan esim. $1 \rightarrow 2$ hajoamisreaktiota



$$p_1 = p_2 + p_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_1 = E_2 + E_3 \\ \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \end{cases}$$

$$m_i^2 c^4 = p_1 \cdot p_1 = (p_2 + p_3) \cdot (p_2 + p_3)$$

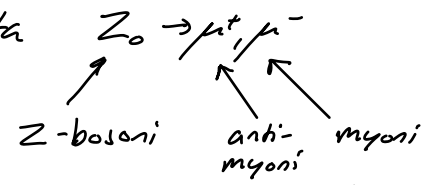
$$\Leftrightarrow m_i^2 c^4 = \left(\frac{E_2 + E_3}{c} \right)^2 - |\vec{p}_2 + \vec{p}_3|^2$$

$$\Rightarrow m_i^2 = \frac{1}{c^2} (p_2 + p_3) \cdot (p_2 + p_3)$$

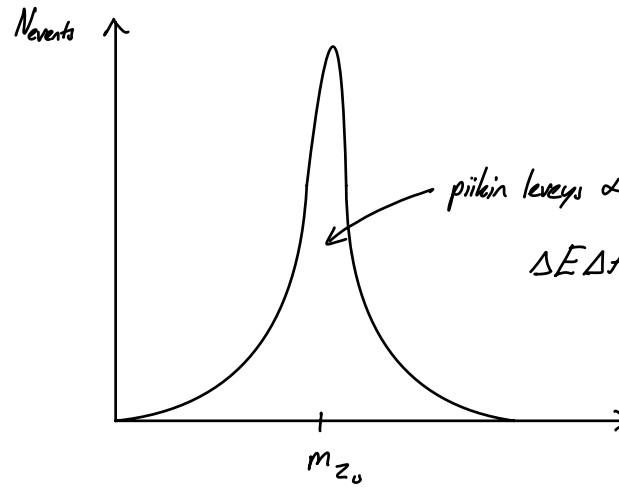
$$\Leftrightarrow m_i^2 = \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{E_2 + E_3}{c} \right)^2 - |\vec{p}_2 + \vec{p}_3|^2 \right)$$

"invariantti massa" eli hajoavien hiiden
massa L-inv. muodossa loppujen
suureiden avulla

Labratyössä tarkastellaan hajoamisreaktiota



(näihin palataan hitutys.-osassa)



piikin leveys $\propto \Gamma^{-1}$, missä Γ hajoavan hiukan elinikä

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \rightarrow \Delta E = \Delta M \sim \frac{\hbar}{\Gamma}$$

$$M_{\mu\mu^-} = \frac{\sqrt{(p_{\mu^+} + p_{\mu^-})^2}}{c}$$

inv. massa

Yhteenveto: energia ja liikemäärä suhteellisuusteoriassa

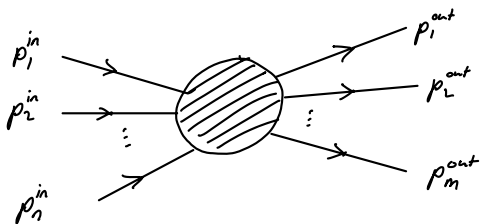
• Energia: $E = \gamma mc^2 = \underbrace{mc^2}_{= E_0} + \underbrace{(\gamma - 1)mc^2}_{= E_{kin}}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

• Liikemäärä: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

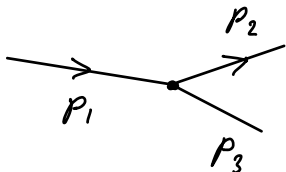
• $E = \sqrt{m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2}$, $m=0 \Rightarrow E = |\vec{p}|c$

• E ja \vec{p} säilyvät



$$E_{in} = E_{out}$$

$$\vec{p}_{in} = \vec{p}_{out}$$

Esim.

$$m_2 = m_3 = m$$

hiduilla 2 ja 3 sama massa

$$E_1 = E_2 + E_3$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$m_1^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - |\vec{p}_1|^2 = \frac{(E_2 + E_3)^2}{c^2} - |\vec{p}_2 + \vec{p}_3|^2$$

Lorentz -invariantteja ehtoja,
voimassa missä tahansa in.
koordinaatistossa

Tarkastellaan tilannetta massakeskipistekoordinaatistossa ($\sum_i m_i \vec{x}_i = 0$)
(Center of Mass (CM) frame)

$$E_1 = m_1 c^2, \quad \vec{p}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_3 \equiv \vec{p}$$

$$E_2 = \gamma_2 m c^2$$

$$E_3 = \gamma_3 m c^2 = \gamma_2 m c^2 = E_2$$

$$E_1 = E_2 + E_3 = 2E_2 \equiv E$$

$$\uparrow \\ |\vec{p}_2| = |\vec{p}_3|$$

$$m_1^2 c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} - |\vec{p}_1|^2 = \frac{(E_2 + E_3)^2}{c^2} - |\vec{p}_2 + \vec{p}_3|^2$$

$$= \frac{4E^2}{c^2}$$

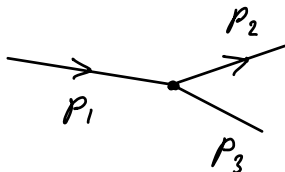
$$\Rightarrow E^2 = m^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2 = \frac{1}{4} m_1^2 c^4$$

$$|\vec{p}| = \frac{c}{2} \sqrt{m_1^2 - 4m^2} \geq 0$$

\Rightarrow

$$m_1 \geq 2m$$

massaton hitu ei voi hajota
2:ksi massattomaksi



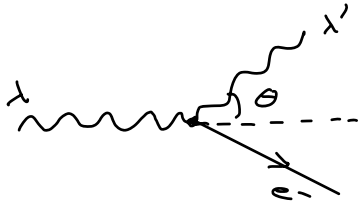
Pätee yleisemminkin:

$$m_1 \geq m_2 + m_3$$

Compton-sironta

Fotonien sironta elektroneista:

(γ säteiden vu. aineen kanssa
 \Rightarrow materiaalfys., lääketiet. fys., ...)



Compton 1923: $\underbrace{\lambda' - \lambda}_{\equiv \Delta\lambda} = \underbrace{\frac{h}{m_e c}}_{\equiv \lambda_e \approx 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}} (1 - \cos\theta)$ Aaltokuvassa $\lambda' = \lambda \Rightarrow$ **fotonit hiukkasia**
 elektronin Compton aallonpituus

Johdetaan Comptonin tulos:

LAB - koordinaatisto

$E_e = m_e c^2, \vec{p}_e = \vec{0}$ kohde e^-

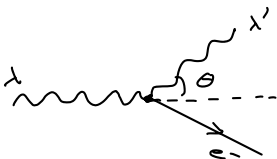
E_e', \vec{p}_e' sironnut e^-

$E_\gamma = |\vec{p}_\gamma| c, \vec{p}_\gamma = \vec{p}_\gamma$ saapuva foton

$E_\gamma' = |\vec{p}_\gamma'| c, \vec{p}_\gamma'$ sironnut γ

$(E_\gamma = \hbar |\vec{k}| c = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} c = \frac{hc}{\lambda})$

Compton-sironna



(6)

$$E_e = m_e c^2, \quad \vec{p}_e = 0 \quad \text{kohde } e^-$$

$$E_e', \quad \vec{p}_e' \quad \text{siirnut } e^-$$

$$E_\gamma = |\vec{p}_\gamma| c, \quad \vec{p}_\gamma = \vec{p}_\gamma \quad \text{saapuva fotoni}$$

$$E_\gamma' = |\vec{p}_\gamma'| c, \quad \vec{p}_\gamma' \quad \text{siirnut } \gamma$$

$$\cancel{m_e^2 c^2} = \frac{E_e'^2}{c^2} - |\vec{p}_e'|^2$$

$$= \frac{(E_e + E_\gamma - E_\gamma')^2}{c^2} - |\vec{p}_e + \vec{p}_\gamma - \vec{p}_\gamma'|^2$$

$$= \frac{(m_e c^2 + |\vec{p}_\gamma| c - |\vec{p}_\gamma'| c)^2}{c^2} - |\vec{p}_\gamma - \vec{p}_\gamma'|^2$$

$$= \cancel{m_e^2 c^2} + \cancel{|\vec{p}_\gamma|^2} + \cancel{|\vec{p}_\gamma'|^2} - 2|\vec{p}_\gamma||\vec{p}_\gamma'| + 2m_e c (|\vec{p}_\gamma| - |\vec{p}_\gamma'|) - \underbrace{(|\vec{p}_\gamma|^2 + |\vec{p}_\gamma'|^2 - 2\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_\gamma')}_{= |\vec{p}_\gamma||\vec{p}_\gamma'| \cos \theta}$$

$$0 = 2|\vec{p}_\gamma||\vec{p}_\gamma'|(\cos \theta - 1) + 2m_e c (|\vec{p}_\gamma| - |\vec{p}_\gamma'|)$$

$$1 - \cos \theta = m_e c \frac{(|\vec{p}_\gamma| - |\vec{p}_\gamma'|)}{|\vec{p}_\gamma||\vec{p}_\gamma'|} \quad |\vec{p}_\gamma| = \frac{h}{\lambda}$$

$$= m_e c \left(\frac{\lambda' - \lambda}{h} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

$$\Delta \lambda \sim \lambda_e \sim 10^{-12} \text{ m, merkitykseltäin jos } \lambda \gg 10^{-12} \text{ m}$$