Moderni fysiikka, osa B

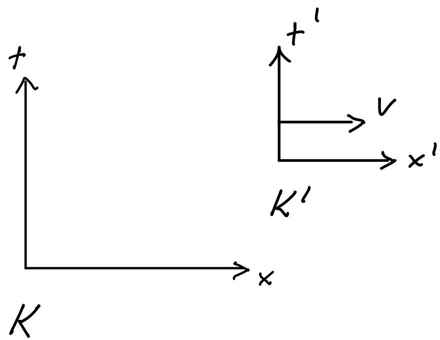
- Suppean suhteellisuusteorian perusteet
- Katsaus ydinfysiikkaan
- Katsaus hiukkasfysiikkaan
- Kosmologian alkeita

Suhteellisuusteoria: johdantoa

- Newton: aika ja paikka absoluuttisia = approksimaatio joka toimii kun $v \ll c$
  ($c \simeq 3.00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ valon nopeus tyhjiössä)

- Suhteellisuusteoria = teoria aika-avaruuden rakenteesta
  ajan ja paikan käsitteet eivät ole absoluuttisia

Esim.



Havaitsija K' liikkuu havaitsijan K suhteen nopeudella v

Newton $t' = t$

Suhteellisuusteoria $t' \neq t$

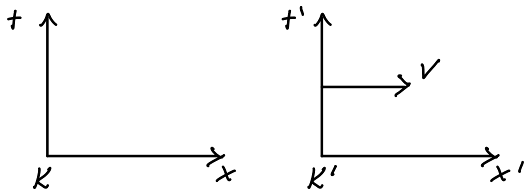
- Suppea suhteellisuusteoria (Einstein 1905): ei painovoimaa, aika-avaruus staattinen

- Yleinen suhteellisuusteoria (Einstein 1916): sisältää painovoiman, aika-avaruus dynaaminen

Inertiaalisysteemi eli inertiaalikoordinaatisto

Inertiaalikoordinaatisto ≡ koordinaatisto, jossa levossa olevaan kappaleeseen ei kohdistu voimia

- Suhteellisuusteoriassa tarkastellaan toistensa suhteen liikkuvia inertiaalikoordinaatistoja



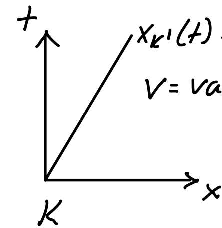
inertiaalikoordinaatisto

Jos v = vakio, K' on myös inertiaalikoord.
Jos $v \neq$ vakio, K' ei ole inertiaalikoord.

- Suppeassa suhteellisuusteorian määrittämisessä ei tarvita muuta, teoriaa sinänsä voidaan yhtä hyvin soveltaa myös kiihtyvässä liikkeessä oleville koordinaatistoille

Inertiaalikoordinaatistot Newtonin fysiikassa

- Tarkastellaan toistensa suhteen liikkuvia inertiaalikoordinaatistoja K ja K':



$x_{K'}(t) = vt$ K':n rata

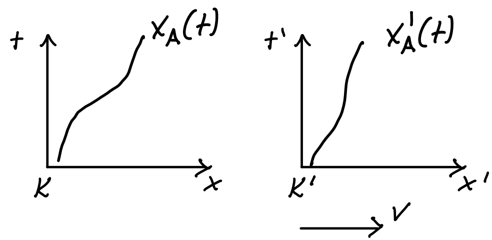
$v = $ vakio, liike x-aks. suuntaan

- Newtonin fysiikassa aika absoluuttinen, joten koordinaatistomuunnos $K \to K'$:

$$t' = t$$
$$x' = x - vt \quad (\text{ol. } K = K' \text{ kun } t = 0)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Galilein muunnos

- Newtonin lait samaa muotoa K:ssa ja K':ssa:



$$F = \frac{d^2 x_A}{dt^2} = \frac{d^2 x'_A}{dt^2} = F' \qquad \text{(HT)}$$

K ja K' mittaavat samat voimat ja kiihtyvyydet

Ongelma: Maxwellin yhtälöt muuttuvat Galilein muunnoksissa

(James Clerk Maxwell, 1861–1862)

Maxwellin yhtälöt = klassinen sähkömagnetismi

Tyhjiössä:

$$\nabla\cdot\overline{E} = 0 \quad \text{(sähkökenttä)} \qquad \nabla\times\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\overline{B} = 0 \quad \text{(mag. kenttä)} \qquad \nabla\times\overline{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}$$

ϵ_0, μ_0: vakioita

Matematiikkaa (ei tarvitse osata tällä kurssilla)

$\nabla \equiv \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$ vektorioperaattori "gradientti", "nabla"

$\nabla\cdot\overline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ skalaari "divergenssi" (divergence)

$\nabla\times\overline{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$ vektori "roottori" (curl)

Erityisesti Maxwellin yhtälöistä seuraa:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{E}(t,\overline{x}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{E}(t,\overline{x})}{\partial t^2} = 0$$

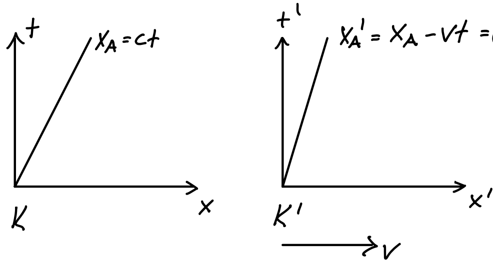
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{B}(t,\overline{x}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{B}(t,\overline{x})}{\partial t^2} = 0$$

3-d aaltoyhtälö, ratkaisut nopeudella c eteneviä aaltoja

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2.99792458\cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Valo $(\overline{E},\overline{B})$-kentän aaltoilua $\Rightarrow$ valon nopeus $= c$ missä koordinaatistossa?

- Sovelletaan Galilein muunnosta (= Newtonin fysiikkaa) valolle



$x_A' = x_A - vt = (c-v)t \equiv c't' \Rightarrow c' = c - v$

eli valon nopeus eri K:ssa ja K':ssa

- Eli: Maxwellin yhtälöt $\Rightarrow$ valon nopeus = c

  Newtonin fysiikka $\Rightarrow$ $c \rightarrow c'$ kun siirrytään in.koord.sta toiseen $K \rightarrow K'$

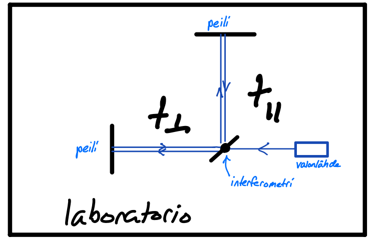
  $\Rightarrow$ missä koordinaatistossa nopeus siis on c ??

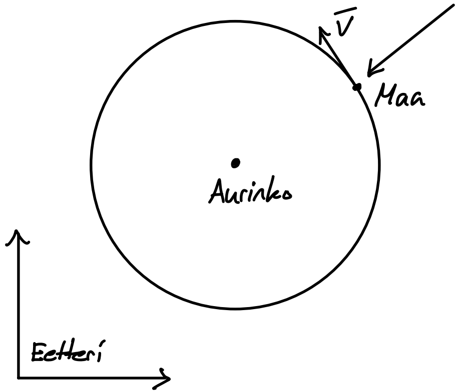
- 1800-luvun lopun hypoteesi = eetteriteoria

Eetteri = absoluuttinen lepokoordinaatisto, jossa valon nopeus on c

Testattavissa oleva ennuste

Michelson-Morley koe:
(1887)





Maa liikkuu eetterin suhteen $v_\perp \neq v_\parallel$

Galilein muunnoksen mukaan siis $c_\perp \neq c_\parallel$

$\Rightarrow t_\perp \neq t_\parallel \Rightarrow$ mitattava interferenssi $\perp$ ja $\parallel$ valonsäteiden välillä

Havainto $t_\perp = t_\parallel \Rightarrow c_\perp \neq c_\parallel \Rightarrow$ eetteriteoria ei toimi!

- Einstein: valon nopeus = c kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa

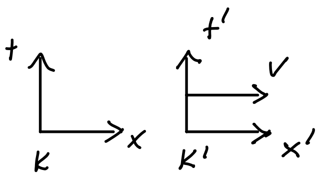
  $\Rightarrow$ suppea suhteellisuusteoria 1905

Suppea suhteellisuusteoria (Special Relativity)

1) Valon nopeus on c **kaikissa inertiaalisysteemeissä**   Inertiaalisysteemi = ei kiihtyvyyttä

2) Kaikki inertiaalisysteemit samanarvoisia, **vain suhteellinen liike merkitsee**

$\Rightarrow$ **aika ja paikka eivät ole absoluuttisia**, riippuvat havaitsijasta



$K \to K'$ Lorentz-muunnos $\neq$ Galilein muunnos

$\Delta t \neq \Delta t'$, $\Delta x \neq \Delta x'$

Newtonin fysiikka rajalla $v \ll c$, arkielämässä $v \ll c$ $\Rightarrow$ "intuitio = Newton"

3) Fysiikan lait samat kaikissa inertiaalisysteemeissä

Lorentz muunnokset

- Suhteellisuusteorian postulaatit 1) ja 2) määräävät aika- ja paikkakoordinaattien muunnosominaisuudet siirryttäessä inertiaalisysteemistä toiseen.

- Yl. linearisoitu koordinaattimuunnos $K \to K'$ on muotoa: (ol. liike x-akselin suuntaisesti, joten $y'=y$, $z'=z$)

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= Ax + Bt + \alpha \\ t' &= Dt + Ex + \beta \end{aligned}}$$

$A, B, D, E, \alpha, \beta$ vakioita

0) Ol. $K = K'$ kun $t=0$ $\Rightarrow$ $x'(x=0, t=0) = \alpha \overset{\text{asetetaan}}{=} 0$

$t'(t=0, x=0) = \beta = 0$

$\alpha = \beta = 0$ $\Rightarrow$ $6-2=4$ param. jäljellä

liikkeestä riippumaton triviaali ehto.

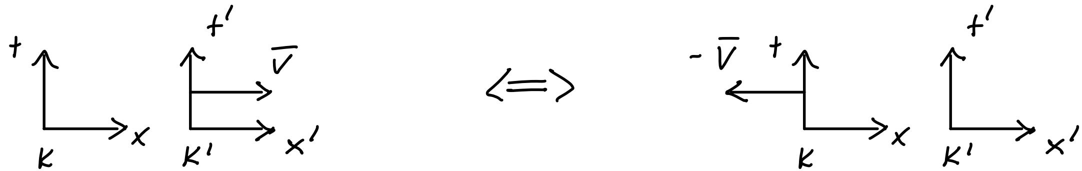
1) Vaaditaan että $c =$ vakio kaikissa inertiaalisysteemeissä

$c = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'}$ missä $x(t)$ ja $x'(t')$ valonsäteen koordinaatit K ja K':ssa

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{A\,dx + B\,dt}{D\,dt + E\,dx} \underset{\frac{dx}{dt}=c}{=} \frac{Ac + B}{D + Ec} = \frac{dx}{dt} = c \quad \Rightarrow \quad Ac + B = Dc + Ec^2$$

$4-1=3$ param. jäljellä

2) Kaikki inertiaalikoordinaatistot samanarvoisessa asemassa, vain suhteellinen liike merkitsee



Piste $x'=0$ liikkuu nopeudella v K:n suhteen:

$$x(x'=0,t) = vt$$

$$x' = Ax + Bt \Rightarrow 0 = Avt + Bt$$
$$B = -Av \qquad \text{1 ehto}$$

Piste $x=0$ liikkuu nopeudella $-v$ K':n suhteen:

$$x'(x=0,t') = -vt'$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = Ax + Bt \Rightarrow -vt' = Bt \\ t' = Dt + Ex \Rightarrow t' = Dt \end{array}\right\} \Rightarrow -vD = B \quad \text{1 ehto}$$

Saadaan siis:

$$\begin{array}{l} B = -Av \\ B = -Dv \end{array} \Rightarrow A = D$$

sij. tämä kohdan 1) ehtoon $Ac + B = Dc + Ec^2$:

$$Ac + B = Ac + Ec^2$$
$$Ec^2 = B = -Av$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = Ax + Bt \\ t' = Dt + Ex \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x' = A(x - vt) \\ t' = A(t - vx/c^2) \end{array}}$$

- Muunnos toiseen suuntaan $K' \to K$ on täsmälleen samaa muotoa, paitsi $v \to -v$:

$K' \to K$

$$x = A(x' + vt')$$
$$t = A(t' + vx'/c^2)$$

$K \to K'$

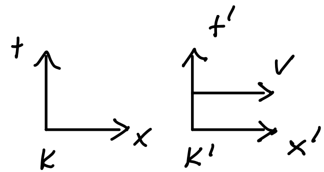
$$x' = A(x - vt)$$
$$t' = A(t - vx/c^2)$$

- Muunnoksen $K \to K' \to K$ täytyy olla identiteetti, kiinnittää A:n:

$$\begin{aligned} x &= A(x' + vt') \\ &= A\left(A(x - vt) + vA(t - vx/c^2)\right) \\ &= A^2\left(x - vt + vt - v^2\frac{x}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$x = A^2 x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \implies A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma$$

- Vaadittiin: 1) c sama kaikille inertiaalisysteemeille
  2) kaikki inertiaalisysteemit samanarvoisia



$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Lorentz muunnos
kun K' liikkuu K:n suhteen nopeudella v x-aks. suuntaan.

- Määrää miten inertiaalikoordinaatistojen K ja K' aika ja paikka suhteessa toisiinsa

Huom. koordinaatistot voidaan aina kiertää siten, että $\vec{v} \parallel \hat{e}_x$ eli liike x-aks. suuntaan. Tulos on siis täysin yleinen.

- SR: kaikki fysiikan lait näyttävät samoilta missä tahansa in. systeemissä

$\Rightarrow$ lait invariantteja Lorentz-muunnoksissa
(eli muoto säilyy kun $K \to K'$)

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x' = \gamma(x - vt)}$$

- Maxwellin yhtälöt ovat invariantteja L-muunnoksessa (tämä oli lähtökohta)

Esim. $\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{E} = \nabla'^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\bar{E}$ (HT)

- Newtonin lait inv. G-muunnoksissa $\neq$ L-muunnos $\Rightarrow$ tarvitaan N. lakien SR yleistys
$\Rightarrow$ energia, liikemäärä muuttuvat
Tähän palataan myöhemmin

- Rajalla $v \ll c$ Lorentz muunnokset palautuvat Galilein muunnoksiksi (HT)

$$t' = t + \mathcal{O}(v^2/c^2)$$
$$x' = x - vt + \mathcal{O}(v^2/c^2)$$

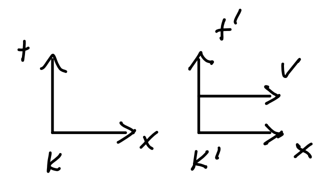
Tällä rajalla SR $\longrightarrow$ Newton

Kertaus tähän asti:

inertiaalikoordinaatisto $\equiv$ ei kiihtyvyyttä
(toisen in. koord. suhteen)

- Valon nopeus c kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa
- Fysiikan lait samat kaikissa in. systeemeissä
- Muunnos in. koordinaatistosta K nopeudella v liikkuvaan koordinaatistoon K' on Lorentz muunnos:

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad , \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

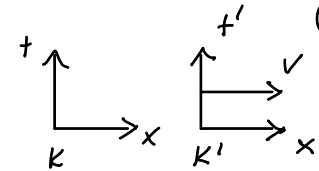


Määritelty kun $v \in [0, c]$
(ks. s. 15)

Fysiikan lait Lorentz-invariantteja $\Leftrightarrow$ eri inertiaalihavaitsijat havaitsevat saman fysiikan

Samanaikaisuus on suhteellista:

Tarkastellaan kahta tapahtumaa A, B in. systeemeissä K ja K'



$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

K:

$(t_A, x_A), (t_B, x_B)$

K':

$(t_A', x_A'), (t_B', x_B')$

$$\Delta t = t_B - t_A \longrightarrow \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

K:ssa samanaikaisuus $\Leftrightarrow \Delta t = 0 \Longleftrightarrow \Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2}\Delta x$ $= 0$ vain jos $\Delta x = 0$

$$\boxed{\text{Kausaalisuus absoluuttista}}$$

A on B:n syy K:ssa $\Rightarrow t_A \leq t_B$

$$\Delta t = t_B - t_A \geq 0$$

A on B:n syy myös K':ssa $\Rightarrow t_A' \leq t_B'$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{c^2}{v}$$

(val. x-aks. s.e. $\Delta x > 0$)

Kausaalisuhteen säilyminen antaa siis ehdon:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{c^2}{v}$$ täytyy olla voimassa mille tahansa $v \in [0, c]$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c$$ välttämätön ehto kausaalisuhteen säilymiselle!

Kun pisteet A, B infinitesimaalisen lähellä toisiaan:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt} \equiv v_{signal} \leq c$$; v_{signal} = nopeus, jolla kausaalinen informaatio voi välittyä

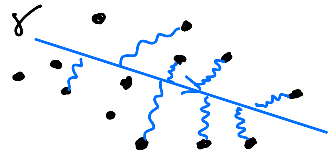
$$\Rightarrow \boxed{v_{signal} \leq c}$$, mikään informaatio ei kulje nopeammin kuin c

Ylivalonnopeus = kausaalisuhteen rikkominen

Huom: $\boxed{v_{signal} \leq c, \text{ missä } c = \text{valon nopeus tyhjiössä}}$

yleisemmin:
mikä tahansa massaton
hitu liikkuu nopeudella c
(tämä selviää myöhemmin)

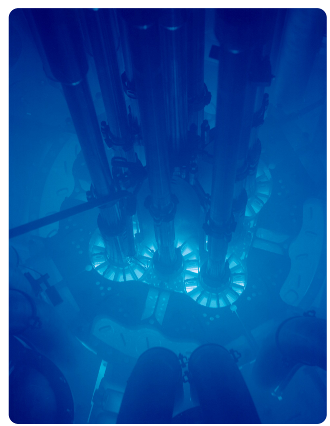
Väliaineessa



SM aalto vuorovaikuttaa aineen kanssa, etenevä aalto ei vapaita fotoneja

$c_{medium} = \frac{c}{n} < c$, mahdollista esim. $v_{elektroni} > c_{medium}$, mutta $v \leq c$ aina

refraktiivinen indeksi



(Wikipedia)

Cherenkov radiation; säteilyä elektroneista, jotka liikkuvat väliaineessa nopeudella $v > c_{medium}$. Esim. ydinreaktorit.

Nopeuksien yhteenlasku

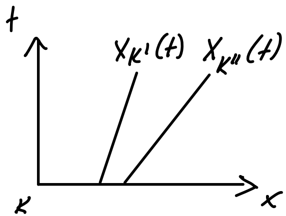
K' liikkuu nopeudella v_1 = vakio K:n suhteen

K'' liikkuu nopeudella v_2 = vakio K':n suhteen

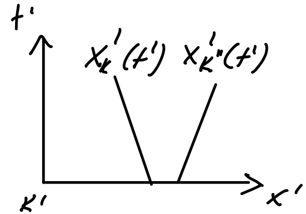
Mikä on K'':n nopeus v K:ssa?

Oletetaan että kaikki liike tapahtuu K:n x-akselin suuntaan:

K':n ja K'':n radat K:ssa



K:n ja K'':n radat K':ssa



$$v_2 = \frac{dx'_{K''}}{dt'}$$

$$v_1 = \frac{dx_{K'}}{dt}$$

$$v = \frac{dx_{K''}}{dt}$$

Lorentz-muunnos $(t,x) \rightarrow (t',x')$:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right) \qquad \Rightarrow \qquad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v_1}{c^2}dx\right)$$

$$x' = \gamma(x - v_1 t) \qquad\qquad dx' = \gamma(dx - v_1 dt)$$

Tämän avulla: $$v_2 = \frac{dx'_{K''}}{dt'} = \frac{\gamma(dx_{K''} - v_1 dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v_1}{c^2}dx_{K''}\right)} = \frac{\frac{dx_{K''}}{dt} - v_1}{1 - \frac{v_1}{c^2}\frac{dx_{K''}}{dt}} = \frac{v - v_1}{1 - \frac{v_1 v}{c^2}}$$

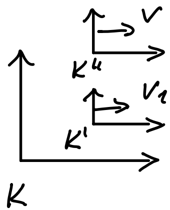
Nopeuksien yhteenlasku

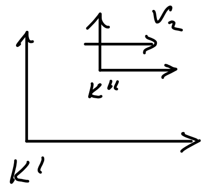
K' liikkuu nopeudella v_1 = vakio K:n suhteen

K'' liikkuu nopeudella v_2 = vakio K':n suhteen

Mikä on K'':n nopeus v K:ssa?

Saatiin siis tulos $v_2 = \dfrac{v - v_1}{1 - \frac{v v_1}{c^2}} \Rightarrow v_2 + v_1 = v\left(1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}\right)$



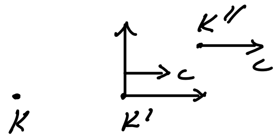


Nopeuksien yhteenlaskukaava

$$\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

Vrt. Newton $v = v_1 + v_2$

Esim.



Millä nopeudella K'' liikkuu K:n suhteen?

$2c$? EI !

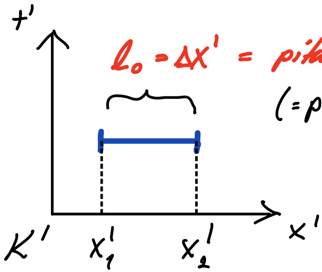
Sovelletaan yhteenlaskusääntöä:

$v_1 = c, \quad v_2 = c$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$ kuten pitää ollakin

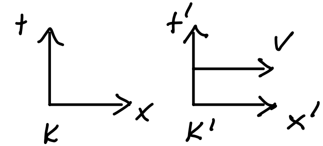
Lorentz -kontraktio

Tangon lepokoordinaatisto K'



$\ell_0 = \Delta x'$ = pituus lepokoordinaatistossa (= proper length)

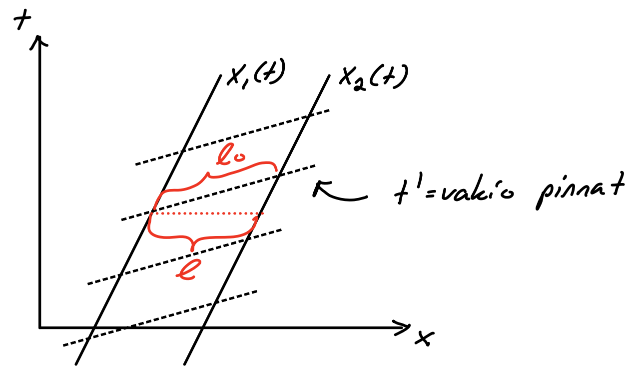
K' liikkuu K:n suhteen



Lorentz -muunnos:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \Leftrightarrow \quad x = \gamma(x' + vt') \qquad \Rightarrow$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad\quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

Tangon rata K:ssa



Pituus K:ssa $\ell \equiv x_2 - x_1$ mitattuna samanaikaisesti K:ssa, $\Delta t = 0$

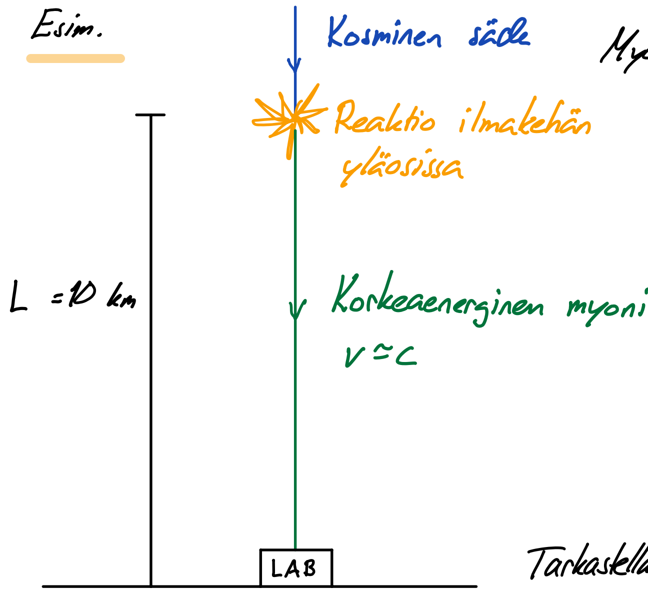
Lorentz: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$

$$\ell = \Delta x\Big|_{\Delta t = 0} = \gamma^{-1}\Delta x' \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\ell = \gamma^{-1}\ell_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\ell_0}$$

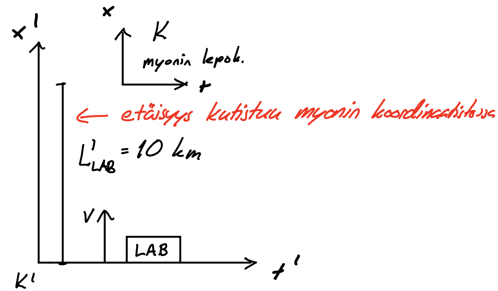
Liikkuva kappale näyttää lyhenevän!

Esim.



Myonin elinaika lepokoordinaatistossa $\tau_0 = 2{,}2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$

$v\tau_0 \simeq 660\,\mathrm{m} \ll 10\,\mathrm{km}$, miksi suurenergisiä myoneja kuitenkin pääsee maahan?



Tarkastellaan tilannetta myonin lepokoordinaatistossa K:

K' lähestyy K:ta nopeudella v

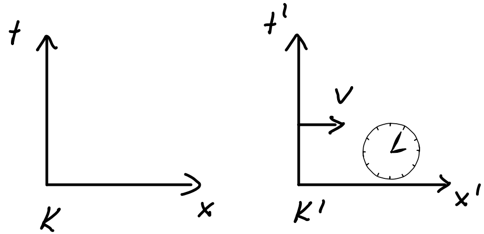
K':in etäisyys L'_{LAB} vastaa K:ssa etäisyyttä $L_{LAB} = \gamma^{-1} L'_{LAB} < 10\,\mathrm{km}$

Ajassa τ_0 K' kulkee K:ssa matkan $v\tau_0$

Milloin $v\underset{\uparrow\, = 2.2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}{\tau_0} > L_{LAB} \Leftrightarrow v\tau_0 > \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot 10\,\mathrm{km} \Rightarrow v > 0.998c$

Kun v riittävän iso, LAB saavuttaa myonin ajassa τ_0!

Aikadilaatio



K'ssa paikallaan oleva kello mittaa tapahtumien A ja B välillä ajan

$$\Delta t' = t_B - t_A \quad , \quad \Delta x' = 0$$

Mikä on vastaava ajanjakso K:ssa?

Lorentz-muunnos:

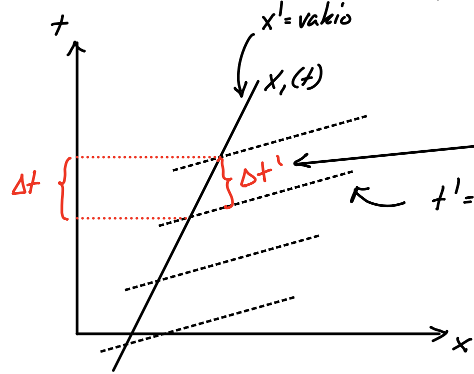
$$\left.\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0 \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta t' = \gamma^{-1}\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t}$$

Liikkuva kello jätättää suhteessa paikallaan olevaan $\Delta t' < \Delta t$!

Näkyy esim. GPS-satelliiteissa ja lennätettäessä atomikelloja lentokoneella maapallon ympäri ($\Delta t_{maa} - \Delta t'_{kello} \sim 10^{-7}\,s$)

Aikadilaatio

Kellon rata K:ssa



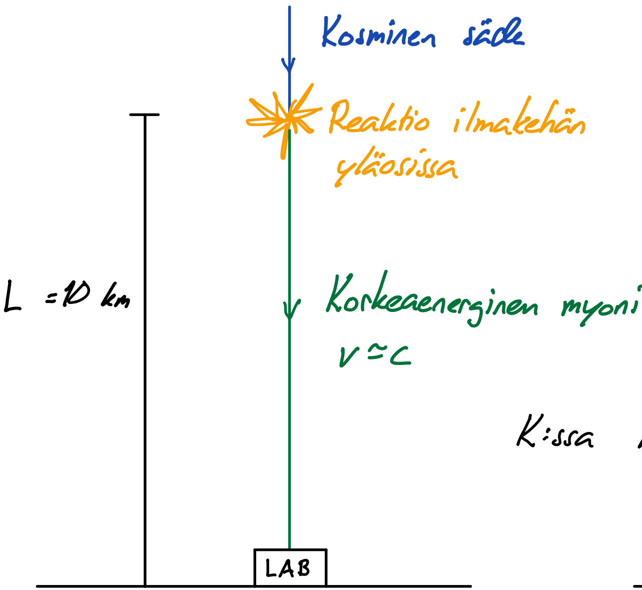
t' = vakio pinnat

$$x' = \gamma(x - vt) \quad > \quad x = \gamma(x' + vt')$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$\Delta t'\Big|_{\Delta x' = 0} = \gamma^{-1}\Delta t < \Delta t$$

Esim. Myonit uudestaan

Myonin elinaika lepokoordinaatistossa $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$



Olk. K LAB koord. ja K' myonin lepokoord.

$\Delta t' = \tau_0$, $\boxed{\text{aikadilaatio } \Delta t' = \gamma^{-1} \Delta t}$

$$\Longrightarrow \Delta t \equiv \tau_{LAB} = \gamma \tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

K:ssa myoni ehtii kulkea matkan $v\tau_{LAB} = \dfrac{v\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > v\tau_0$

$$\frac{v\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq L \Rightarrow v \geq 0{,}998c$$

Sama tulos kuin s. 21 laskussa