

Palautus ke 13.12. klo 22:00 mennessä, ks. tarkemmat ohjeet Moodlesta.

- Elektronit ja protonit yhdistyvät neutraaleiksi atomeiksi ns. rekombinaatioprosessissa, jolloin maailmankaikkeuden lämpötila $T_{\text{rek}} \approx 2970$ K. Rekombinaatohetkeltä peräisin olevat fotonit havaitaan nykyään kosmisena mikroaaltotaustana, jonka lämpötila $T_0 \approx 2.725$ K. Laajenevassa maailmankaikkeudessa fotonien lämpötila $T \propto a^{-1}$.
 - Määritä tämän perusteella, kuinka paljon maailmankaikkeus on laajentunut rekombinaation jälkeen, eli laske $a(t_0)/a(t_{\text{rek}})$.
 - Määritä myös rekombinaatohetkeä vastaava punasiirtymä z , kun $a(t_0)/a(t) = 1 + z(t)$.
- Kosmologiassa ainetta voidaan yleensä mallintaa ideaalifluidina, jonka ominaisuudet määrittää muotoa $p = w\rho$ oleva tilanyhtälö, missä $w = \text{vakio}$. Energiatiheyden ja skaalatekijän välinen riippuvuus määräytyy jatkuvuusyhtälöstä $\dot{\rho} + 3(\dot{a}/a)(\rho + p) = 0$. Näytä, että $\rho(a) = \rho_0(a/a_0)^{-3(1+w)}$ toteuttaa jatkuvuusyhtälön ja kirjoita ratkaisu $\rho(a)$ eksplisiittisesti säteilylle, materiaalille ja tyhjiöenergialle.
- Tarkastellaan epärelativistisen aineen eli materian dominoimaa maailmankaikkeutta, jossa siis $\rho \propto a^{-3}$. Näytä, että $a(t) = a_0(t/t_0)^{2/3}$, missä a_0 ja t_0 ovat vakioita, toteuttaa Friedmanın yhtälön $(\dot{a}/a)^2 = 8\pi G\rho/3$.
- Pimeä energia on ominaisuuksiltaan tyhjiöenergian kaltainen komponentti, jolle $p = -\rho = \text{vakio}$.
 - Näytä, että $a(t) = a_0 \exp(H_0(t-t_0))$, missä a_0 , H_0 ja t_0 ovat vakioita, on Friedmanın yhtälön ratkaisu pimeän energian dominoimassa maailmankaikkeudessa.
 - Laske laajenemisen kiihtyvyys $\ddot{a}(t)$ ja vertaa sitä edellisen tehtävän materian dominoimaan tilanteeseen.
- Havaintojen mukaan materian energiatiheys maailmankaikkeudessa nykyhetkellä ($t_0 = 13.8 \times 10^9$ y) on $\rho_{\text{m}0} = 1.13 \times 10^{-11} \text{ eV}^4$, pimeän energian $\rho_{\Lambda 0} = 2.50 \times 10^{-11} \text{ eV}^4$ ja säteilyn $\rho_{\text{r}0} = 2.00 \times 10^{-15} \text{ eV}^4$. Maailmankaikkeuden lämpötila nykyhetkellä on $T_0 = 2.725$ K.
 - Laske, millä punasiirtymän arvolla z materian ja pimeän energian energiatiheydet olivat yhtä suuret. Mikä on vastaava lämpötila?
 - Laske, millä punasiirtymän arvolla z materian ja säteilyn energiatiheydet olivat yhtä suuret. Mikä on vastaava lämpötila?