Complex analysis 2

Exercises 6, 10.5.2024

(suomeksi seuraavalla sivulla)

1. Let $D \neq \mathbb{C}$ be a simply connected domain and let $f : \mathbb{C} \to D$ be analytic. Show that f is a constant function.

2. Show that $\mathcal{F} = \{e^{nz} : n \geq 1\}$ is a normal family in $G = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ but not in any domain larger than G.

3. Let $D \subset \mathbb{C}$ be an unbounded simply connected domain. Without using the Riemann mapping theorem, show that D can be conformally mapped onto a bounded domain (i) if $\mathbb{C} \setminus D$ contains a ball; or (ii) if $D \neq \mathbb{C}$. (*Hint*: for (ii) use an analytic branch of the square root and (i).)

4. Fix $a \in B(0,1)$ and let $\phi_a : B(0,1) \to \mathbb{C}$, $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Prove that
$$\phi_a(B(0,1)) \subset B(0,1).$$
Moreover, prove that $\phi_a : B(0,1) \to B(0,1)$ is a conformal bijection whose inverse function is $(\phi_a)^{-1}(z) = \phi_{-a}(z)$.

5. Find the image of the upper half plane $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$ under the Möbius transformation $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

6. Find the images of the following sets under the Möbius transformation $f(z) = \frac{z+1}{z}$: a) the imaginary axis, b) the right half plane $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, c) the unit circle $\partial B(0,1)$, d) the unit disk $B(0,1)$.

Kompleksianalyysi 2

Demo 6, 10.5.2024

(English on previous page)

1. Olkoon $D \neq \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue ja olkoon $f : \mathbb{C} \to D$ analyyttinen. Näytä, että f on vakiofunktio.

2. Näytä, että perhe $\mathcal{F} = \{e^{nz} : n \geq 1\}$ on normaaliperhe joukossa $G = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ mutta ei missään suuremmassa joukossa kuin G.

3. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ rajoittamaton yhdesti yhtenäinen alue. Näytä ilman Riemannin kuvauslausetta, että D voidaan konformisesti kuvata rajoitetulle alueelle jos (i) $\mathbb{C} \setminus D$ sisältää pallon; tai (ii) $D \neq \mathbb{C}$. (Vihje: kohdassa (ii) käytä neliöjuuren analyyttistä haaraa ja kohtaa (i).)

4. Olkoon $a \in B(0,1)$ ja olkoon $\phi_a : B(0,1) \to \mathbb{C}$, $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Osoita että
$$\phi_a(B(0,1)) \subset B(0,1).$$
Lisäksi, osoita että $\phi_a : B(0,1) \to B(0,1)$ on konforminen bijektio, jonka käänteisfunktio on $(\phi_a)^{-1}(z) = \phi_{-a}(z)$.

5. Etsi puolitason $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$ kuva Möbius-kuvauksessa $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

6. Etsi seuraavien joukkojen kuvat Möbius-kuvauksessa $f(z) = \frac{z+1}{z}$: a) imaginaariakseli, b) oikea puolitaso $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, c) yksikköympyrä $\partial B(0,1)$, d) yksikkökiekko $B(0,1)$.