Complex analysis 2

Exercises 5, 3.5.2024

(suomeksi seuraavalla sivulla)

1. Find the poles of $f(z) = \frac{z^2+1}{(z^2-4)(z^4-1)}$ and determine the corresponding residues.

2. Let $f(z)$ be as in Exercise 1. Evaluate $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz$ when $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, and r takes the values 1/2, 3/2 and 5/2.

3. Apply the residue theorem to evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$.

4. Apply the residue theorem to evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\sin t}\,dt$. (*Hint*: use the formula $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ and the path $\gamma(t) = e^{it}$.)

5. Let f be analytic in a domain that contains $A = \{1 \leq |z| \leq 2\}$. Assume that $f(z) \neq 0$ whenever $z \in S_1 = \partial B(0,1)$ or $z \in S_2 = \partial B(0,2)$. Prove that
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{S_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$
is equal to the sum of the orders of the zeros of f in A.

6. Let D be a domain, and suppose that f_j, $j \geq 1$, are analytic injections converging locally uniformly in D to a function f. Prove that f is either a constant function or injective in D. (*Hint*: find a way to apply Hurwitz's theorem.)

Kompleksianalyysi 2

Demo 5, 3.5.2024

(English on previous page)

1. Etsi funktion $f(z) = \frac{z^2+1}{(z^2-4)(z^4-1)}$ navat ja määritä niitä vastaavat residyt.

2. Olkoon $f(z)$ kuten tehtävässä 1. Laske $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz$ kun $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ja r saa arvot $1/2$, $3/2$ ja $5/2$.

3. Laske $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ residylauseen avulla.

4. Laske $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\sin t}\,dt$ residylauseen avulla. (*Vihje*: käytä kaavaa $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ ja polkua $\gamma(t) = e^{it}$.)

5. Olkoon f analyyttinen alueessa, joka sisältää joukon $A = \{1 \leq |z| \leq 2\}$. Oletetaan, että $f(z) \neq 0$ aina kun $z \in S_1 = \partial B(0,1)$ tai $z \in S_2 = \partial B(0,2)$. Osoita, että

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{S_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

   on yhtä kuin funktion f joukossa A olevien nollakohtien kertalukujen summa.

6. Olkoon D alue ja olkoot f_j, $j \geq 1$, analyyttisiä injektioita jotka suppenevat lokaalisti tasaisesti D:ssä funktioon f. Todista, että f on joko vakiofunktio tai injektio D:ssä. (*Vihje*: etsi tapa soveltaa Hurwitzin lausetta.)