Complex analysis 2

Exercises 4, 26.4.2024

(suomeksi seuraavalla sivulla)

1. Determine the Laurent series representation of $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ in the sets i) $0 < |z| < 1$ and ii) $1 < |z| < \infty$. (*Hint*: use geometric series for $\frac{1}{1-w}$ with suitable choices of w.)

2. Determine the Laurent series representation of $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ in the sets i) $|z| < 1$, ii) $1 < |z| < 2$ and iii) $|z| > 2$. (*Hint*: partial fractions and geometric series.)

3. Determine the Laurent series representation of $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$ in the set $0 < |z-1| < \infty$. (*Hint*: use the Taylor series of $\sin \pi z$ about $z_0 = 1$.)

4. What type of singularity do the following functions have at $z = 0$?
$$\frac{z}{\sin z}, \qquad \frac{\cos z}{z(z^2-1)}, \qquad \frac{1}{1-\cos z}, \qquad e^{-1/z^2}.$$

5. Determine the residue $\mathrm{Res}(f, 0)$ for each of the functions f in the previous exercise.

6. (Partial fractions) Let $P(z) = (z-z_1)^{k_1} \dots (z-z_n)^{k_n}$, where $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ are distinct and $k_1, \dots, k_n \geq 1$. Show that
$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{k_j} \alpha_{j,m}(z-z_j)^{-m}$$
for some $\alpha_{j,m} \in \mathbb{C}$. (*Hint*: use the singular parts of $1/P(z)$ about each z_j and Liouville's theorem.)

Kompleksianalyysi 2

Demo 4, 26.4.2024

(English on previous page)

1. Määritä Laurentin sarjakehitelmä funktiolle $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ joukoissa i) $0 < |z| < 1$ ja ii) $1 < |z| < \infty$. (*Vihje*: käytä geometrista sarjaa $\frac{1}{1-w}$ sopivilla w:n valinnoilla.)

2. Määritä Laurentin sarjakehitelmä funktiolle $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ joukoissa i) $|z| < 1$, ii) $1 < |z| < 2$ ja iii) $|z| > 2$. (*Vihje*: osamurtohajotelma ja geometrinen sarja.)

3. Määritä Laurentin sarjakehitelmä funktiolle $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$ joukossa $0 < |z-1| < \infty$. (*Vihje*: käytä $\sin \pi z$:n Taylorin sarjaa pisteen $z_0 = 1$ ympärillä.)

4. Millainen erikoispiste seuraavilla funktioilla on pisteessä $z = 0$?

$$\frac{z}{\sin z}, \qquad \frac{\cos z}{z(z^2-1)}, \qquad \frac{1}{1-\cos z}, \qquad e^{-1/z^2}.$$

5. Määritä residy $\mathrm{Res}(f, 0)$ jokaiselle edellisen tehtävän funktiolle f.

6. (Osamurtohajotelma) Olkoon $P(z) = (z-z_1)^{k_1} \dots (z-z_n)^{k_n}$, missä $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ovat eri pisteitä ja $k_1, \dots, k_n \geq 1$. Näytä, että

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{k_j} \alpha_{j,m} (z - z_j)^{-m}$$

jolilekin $\alpha_{j,m} \in \mathbb{C}$. (*Vihje*: käytä $1/P(z)$:n singulaariosia kunkin z_j:n ympärillä ja Liouvillen lausetta.)