Complex analysis 2

Exercises 3, 19.4.2024

(suomeksi seuraavalla sivulla)

1. Show that $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ is well-defined and analytic in $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Determine the radii and disks of convergence for the following power series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 5^n (z-i)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

3. Prove (using induction, for instance) Abel's partial summation formula

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) s_k + a_n s_n, \qquad a_k, b_k \in \mathbb{C}.$$

   where $s_j = \sum_{k=1}^{j} b_k$.

4. Use the previous exercise to show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

   converges for any $z \in \partial B(0,1)$ with $z \neq 1$, but diverges when $z = 1$. (Compare with the result in Exercise 1.)

5. Determine the Taylor series representations of $f(z) = \operatorname{Log} z$ centered at $z_0 = 1$ and $g(z) = \sin z$ centered at $z_0 = 0$. What are the disks of convergence?

6. Give an example of a nonconstant analytic function $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ that has infinitely many distinct zeros in $B(0,1)$. Why does this not contradict Theorem 2.22?

Kompleksianalyysi 2

Demo 3, 19.4.2024

(English on previous page)

1. Näytä, että funktio $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ on hyvin määritelty ja analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Määritä suppenemissäteet ja -kiekot potenssisarjoille

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 5^n (z-i)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

3. Osoita (esimerkiksi induktiolla) Abelin osittaissummakaava

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) s_k + a_n s_n, \qquad a_k, b_k \in \mathbb{C}.$$

   missä $s_j = \sum_{k=1}^{j} b_k$.

4. Käytä edellistä tehtävää osoittamaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

   suppenee millä tahansa $z \in \partial B(0,1)$, missä $z \neq 1$, mutta hajaantuu kun $z = 1$. (Vertaa tehtävän 1 tulokseen.)

5. Määritä Taylorin sarjakehitelmä funktiolle $f(z) = \operatorname{Log} z$ pisteessä $z_0 = 1$ ja funktiolle $g(z) = \sin z$ pisteessä $z_0 = 0$. Mitkä ovat suppenemiskiekot?

6. Anna esimerkki ei-vakiosta analyyttisestä funktiosta $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$, jolla on äärettömän monta erisuurta nollakohtaa joukossa $B(0,1)$. Miksi tämä ei ole ristiriidassa Lauseen 2.22 kanssa?