Complex analysis 2

Exercises 2, 12.4.2024

(suomeksi seuraavalla sivulla)

1. If $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converges absolutely, show that $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converges and
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$
(*Hint*: Cauchy's criterion.)

2. Let $s_k : G \to \mathbb{C}$ be continuous functions converging to some $s : G \to \mathbb{C}$ locally uniformly in an open G. Show that if $\gamma : [a, b] \to G$ is a piecewise C^1 path, then
$$\lim_{k\to\infty} \int_\gamma s_k(z)\, dz = \int_\gamma s(z)\, dz.$$

3. Prove that the *Riemann ζ-function*
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
is well-defined and analytic in the half-plane $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1\}$.
(*Hint*: use the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$ for $\gamma > 1$ and the Weierstrass M-test.)

4. Prove that the distance between a compact $K \subset \mathbb{C}$ and a closed $F \subset \mathbb{C}$ with $K \cap F = \emptyset$ is positive. In other words, show that there is $r > 0$ such that $|z - w| \geq r$ for all $z \in K$ and $w \in F$. (*Hint*: argue by contradiction and use that any sequence in K has a convergent subsequence.)

5. Prove the *Heine-Borel property*: if $K \subset \mathbb{C}$ is compact, then any open cover of K has a finite subcover. In other words, if $K \subset \cup_{i\in I} U_i$ where each U_i is open, then $K \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_N}$ for some $i_1, \ldots, i_N$. (*Hint*: you may look up and study the proof from a textbook.)

6. If $U \subset \mathbb{C}$ is open and $f_n \to f$ uniformly on any closed ball in U, show that $f_n \to f$ locally uniformly in U. (*Hint*: use the previous exercise.)

Kompleksianalyysi 2

Demo 2, 12.4.2024

(English on previous page)

1. Oletetaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee itseisesti. Osoita, että $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee ja
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$
(*Vihje*: Cauchyn kriteeri.)

2. Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ avoin ja $s_k : G \to \mathbb{C}$ jatkuvia funktioita, jotka suppenevat funktioon $s : G \to \mathbb{C}$ lokaalisti tasaisesti joukossa G. Näytä, että jos $\gamma : [a, b] \to G$ on paloittain C^1-polku, niin
$$\lim_{k\to\infty} \int_\gamma s_k(z)\, dz = \int_\gamma s(z)\, dz.$$

3. Näytä, että *Riemannin ζ-funktio*
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
on hyvin määritelty ja analyyttinen puolitasossa $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1\}$. (*Vihje*: käytä sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$ missä $\gamma > 1$ ja Weierstrassin M-testiä.)

4. Näytä, että etäisyys kompaktin joukon $K \subset \mathbb{C}$ ja suljetun joukon $F \subset \mathbb{C}$ välillä, missä $K \cap F = \emptyset$, on positiivinen. Ts. näytä, että on olemassa $r > 0$ siten, että $|z - w| \geq r$ kaikilla $z \in K$ ja $w \in F$. (*Vihje*: tee vastaoletus ja käytä sitä tietoa, että joukon K jonolla on suppeneva osajono.)

5. Osoita *Heine-Borelin ominaisuus*: jos $K \subset \mathbb{C}$ on kompakti, niin mikä tahansa joukon K avoin peite sisältää äärellisen alipeitteen. Toisin sanoen, jos $K \subset \cup_{i\in I} U_i$ missä jokainen U_i on avoin, niin $K \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_N}$ joillekin $i_1, \ldots, i_N$. (*Vihje*: voit etsiä ja opetella todistuksen oppikirjasta.)

6. Jos $U \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f_n \to f$ tasaisesti missä tahansa joukon U suljetussa pallossa U, niin näytä, että $f_n \to f$ lokaalisti tasaisesti U:ssa. (*Vihje*: käytä edellistä tehtävää.)