Complex analysis 2

Exercises 1, 5.4.2024

(suomeksi seuraavalla sivulla)

1. Let $G \subset \mathbb{C}$ be a nonempty open set. For any $z \in G$, define

$$C_z = \{w \in G : \exists \text{ path } \gamma : [a,b] \to G \text{ with } \gamma(a) = z \text{ and } \gamma(b) = w\}.$$

Prove that C_z is the maximal connected open subset of G containing z. Show that for $z \neq w$ one has either $C_z = C_w$ or $C_z \cap C_w = \emptyset$. Finally, show that G is the disjoint union of its maximal connected open subsets (called the *components* of G).

2. Let $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, where $\gamma_1(t) = 3e^{it}$, $\gamma_2(t) = 1 + e^{-it}$ and $\gamma_3(t) = -1 + e^{-it}$ for $0 \le t \le 2\pi$. Determine the components of $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ and the possible values $n(\sigma, z)$ for $z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$. Is σ null-homologous in $B(0,4)$, in $B(0,4) \setminus \{-1\}$ or in $B(0,4) \setminus \{-1, 1\}$?

3. Let f be analytic in $G \subset \mathbb{C}$, and for $z, w \in G$ define

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w. \end{cases}$$

Show that $g(z,w)$ is continuous in $G \times G$. (*Hint*: write $f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(\gamma(t))\, dt$ for a suitable path $\gamma(t)$.)

4. If $D \subset \mathbb{C}$ is a bounded domain and $\mathbb{C} \setminus D$ is path-connected, show that D is simply connected. Show that the conclusion may fail if one drops the assumption that D is bounded.

5. Let $\sigma = (\gamma_i, \gamma_0, \gamma_{-i})$ where $\gamma_z = z + \frac{e^{it}}{2}$, $0 \le t \le 2\pi$. Evaluate $\int_\sigma \frac{e^z}{z^3+z}\, dz$. (*Hint*: Cauchy's integral formula.)

6. Use the previous exercise and the global Cauchy theorem to evaluate

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3 + z}\, dz, \qquad \text{where } \gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Kompleksianalyysi 2

Demo 1, 5.4.2024

(English on previous page)

1. Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ epätyhjä avoin joukko. Jos $z \in G$, määritellään
$$C_z = \{w \in G \,:\, \exists \text{ polku } \gamma : [a,b] \to G \text{ jolle } \gamma(a) = z \text{ ja } \gamma(b) = w\}.$$
Osoita, että C_z on suurin yhtenäinen avoin G:n osajoukko, joka sisältää z:n. Osoita, että kaikille $z \neq w$ pätee joko $C_z = C_w$ tai $C_z \cap C_w = \emptyset$. Osoita, että G on sen maksimaalisten avointen yhtenäisten osajoukkojen (eli G:n *komponenttien*) yhdiste.

2. Olkoon $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, missä $\gamma_1(t) = 3e^{it}$, $\gamma_2(t) = 1 + e^{-it}$ ja $\gamma_3(t) = -1 + e^{-it}$ kun $0 \leq t \leq 2\pi$. Määritä joukon $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ komponentit ja kierrosluvun $n(\sigma, z)$ arvot kun $z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$. Onko σ nollahomologinen joukossa $B(0,4)$, $B(0,4) \setminus \{-1\}$ tai $B(0,4) \setminus \{-1, 1\}$?

3. Olkoon f analyyttinen joukossa $G \subset \mathbb{C}$. Jos $z, w \in G$, määritellään
$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w. \end{cases}$$
Osoita, että $g(z,w)$ on jatkuva joukossa $G \times G$. (*Vihje*: kirjoita $f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(\gamma(t))\,dt$ sopivalle polulle $\gamma(t)$.)

4. Jos $D \subset \mathbb{C}$ on rajoitettu alue ja $\mathbb{C} \setminus D$ on polkuyhtenäinen, osoita, että D on yhdesti yhtenäinen. Osoita, että tämä ei välttämättä päde jos D on rajoittamaton.

5. Olkoon $\sigma = (\gamma_i, \gamma_0, \gamma_{-i})$ missä $\gamma_z = z + \frac{e^{it}}{2}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Laske $\int_\sigma \frac{e^z}{z^3+z}\,dz$. (*Vihje*: Cauchyn integraalikaava.)

6. Käyttämällä edellistä tehtävää ja globaalia Cauchyn lausetta, määritä
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3+z}\,dz, \qquad \text{where } \gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$