

# Kompleksianalyysi 2

Tero Kilpeläisen monisteesta muokannut

Antti Vähäkangas

Luentomuistiinpanoja keväälle 2015  
7. toukokuuta 2015

## Alkusanat

Seuraavilla sivuilla on luentomuistiinpanoja Kompleksianalyysi 2 -kurssille. Nämä on pääosin muokattu Tero Kilpeläisen kirjoittamasta luentomonisteesta sopimaan nykyiseen, 30 tunnin luentosarjaan. Riemannin kuvauslauseen todistus pohjautuu Kari Astalan ja Eero Saksmanin kirjoittamaan Complex Analysis II -luentomonisteeseen.

Anna Tuhola kirjoitti muistiinpanojen ensimmäisen L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-version.

Kurssilla käsitellään kompleksista integrointia varsin yleisissä kompleksitason alueissa, analyyttisten funktioiden potenssisarjaesityksiä, residylaskentaa, erikoispisteitä ja konformikuvauksia.

Kaikki muotoa KA1.xx.xx olevat viitteet osoittavat kurssin Kompleksianalyysi 1 (Tero Kilpeläinen, k. 2015) luentomonisteen kohtaan xx.xx.

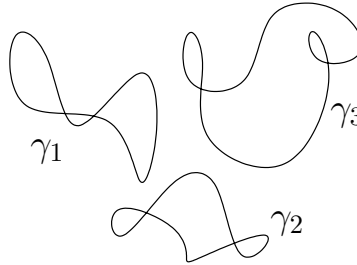
# Sisältö

<b>1. Cauchyn lause ja integraalikaava — homologiset versiot</b>	<b>1</b>
<b>2. Analyttisen funktion potenssisarjaesitys</b>	<b>12</b>
2.1. Kompleksisista sarjoista . . . . .	12
2.2. Potenssisarjakehitelmä . . . . .	21
2.3. Laurent-sarjat . . . . .	26
<b>3. Eristetyt erikoispisteet ja residylause</b>	<b>33</b>
3.1. Erikoispisteet . . . . .	33
3.2. Poistuvat erikoispisteet . . . . .	35
3.3. Navat . . . . .	36
3.4. Oleellisista erikoispisteistä . . . . .	40
3.5. Residylause . . . . .	42
<b>4. Analyttisen funktion kuvausominaisuuksia</b>	<b>46</b>
4.1. Argumentin periaate ja Hurwitzin lause . . . . .	46
4.2. Analyttisen funktion avoimuus . . . . .	48
4.3. Johdantoa konformikuvauksiin . . . . .	50
4.4. Normaaliperheet ja Montelin lause . . . . .	53
4.5. Riemannin kuvauslauseen todistus . . . . .	54
<b>5. Laajennettu kompleksitaso ja Möbius-kuvaukset</b>	<b>58</b>
5.1. Laajennettu kompleksitaso . . . . .	58
5.2. Möbius-kuvauksista . . . . .	59
5.3. Möbius-kuvaukset konformikuvauksina . . . . .	68

# 1. Cauchyn lause ja integraalikaava — homologiset versiot

Cauchyn lauseen yleisen (homologisen) muodon todistusta varten tarvitaan vielä joitakin käsitteitä ja ”muistutus” iteroidusta integraaleista.

**1.1. Määritelmä.** Kompleksitason *sykli* on äärellinen jono  $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ , missä  $\gamma_k$  ovat suljettuja teitä kaikilla  $k = 1, 2, \dots, p$ .



**1.2. Huomautus.** Teiden  $\gamma_k$  järjestyksellä ei ole merkitystä. Usein samastamme esimerkiksi syklit  $(\gamma, \beta, \alpha, \overleftarrow{\gamma}, \overleftarrow{\gamma}, \beta)$  ja  $(\overleftarrow{\gamma} * \gamma, \beta * \beta, \overleftarrow{\gamma}, \alpha)$ . Samaistamme myös suljetun tien  $\gamma$  ja syklin  $\sigma = (\gamma)$ .

Jos  $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$  on sykli, niin

$$|\sigma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \dots \cup |\gamma_p|,$$

ja edelleen  $\sigma$  on *sykli joukossa*  $A$ , jos  $|\sigma| \subset A$ . Huom! Syklin  $\sigma$  jälki  $|\sigma|$  on kompakti, sillä se on äärellinen yhdiste kompakteja joukkoja.

Jos  $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$  on sykli ja  $f : |\sigma| \rightarrow \mathbf{C}$  on jatkuva, niin

$$\int_{\sigma} f(z) dz = \sum_{k=1}^p \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

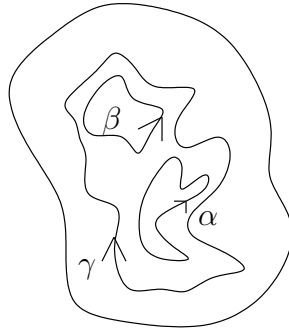
Erityisesti, syklin  $\sigma$  kierrosluku pisteen  $z_0 \notin |\sigma|$  ympäri on

$$n(\sigma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{k=1}^p n(\gamma_k, z_0).$$

**1.3. Määritelmä.** Olkoon  $\sigma$  sykli avoimessa joukossa  $G \subset \mathbf{C}$ . Sykli  $\sigma$  on *nollahomologinen* joukossa  $G$ , jos

$$n(\sigma, z) = 0 \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C} \setminus G.$$

Suljettu tie  $\gamma$  avoimessa joukossa  $G$  on *nollahomologinen* joukossa  $G$ , jos sykli  $\sigma = (\gamma)$  on nollahomologinen joukossa  $G$ .



Kaksi sykliä  $\sigma_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$  ja  $\sigma_1 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$  avoimessa joukossa  $G$  ovat *homologiset* joukossa  $G$ , jos sykli

$$\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p, \overleftarrow{\beta_1}, \overleftarrow{\beta_2}, \dots, \overleftarrow{\beta_q})$$

on nollahomologinen joukossa  $G$ .

Avoimen joukon  $G$  tiet  $\lambda_0$  ja  $\lambda_1$  ovat *homologiset* joukossa  $G$ , jos niillä on yhteiset alku- ja loppupisteet ja suljettu tie  $\lambda = \lambda_0 * \overleftarrow{\lambda_1}$  on nollahomologinen joukossa  $G$ .

**1.4 Huomautus.** Syklit  $\sigma_0$  ja  $\sigma_1$  (avoimessa) joukossa  $G$  ovat homologisia joukossa  $G$  jos, ja vain jos,

$$n(\sigma_0, z) = n(\sigma_1, z) \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C} \setminus G.$$

Tämä seuraa suoraan määritelmästä ja seuraavasta laskusta (merkinnät kuten yllä):

$$\begin{aligned} n(\sigma, z) &= \sum_{k=1}^p n(\gamma_k, z) + \sum_{m=1}^q n(\overleftarrow{\beta_m}, z) \\ &= \sum_{k=1}^p n(\gamma_k, z) - \sum_{m=1}^q n(\beta_m, z) = n(\sigma_0, z) - n(\sigma_1, z), \end{aligned}$$

missä  $z \in \mathbf{C} \setminus G$ .

**1.5. Huomautus.** Kaikki syklit kiekossa  $B \subset \mathbf{C}$  ovat nollahomologisia joukossa  $B$ . Olkoon nimittäin  $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$  sykli kiekossa  $B$ . Tällöin  $|\sigma| \subset B$  ja siten  $\mathbf{C} \setminus B$  sisältyy joukon  $\mathbf{C} \setminus |\gamma_k|$  rajoittamattomaan komponenttiin kaikilla  $k = 1, 2, \dots, p$ . Lemman KA1.5.4 nojalla kaikilla  $z \in \mathbf{C} \setminus B$  on

$$n(\sigma, z) = \sum_{k=1}^p n(\gamma_k, z) = 0.$$

Tarvitsemme aputuloksen integraalijärjestyksen vaihdosta iteroidussa (kompleksisessä) integraalissa. Jos  $R = \{z = x + iy : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  on suljettu suorakaide ja  $h : R \rightarrow \mathbf{C}$  jatkuva, niin Fubinin lauseen nojalla

$$(1.1) \quad \int_c^d \left( \int_a^b h(t, s) dt \right) ds = \int_a^b \left( \int_c^d h(t, s) ds \right) dt.$$

Edelleen

**1.6. Lemma.** Olkoon  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  ja  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$  teitä ja  $g : |\gamma| \times |\beta| \rightarrow \mathbf{C}$  jatkuva.<sup>1</sup> Tällöin

$$\int_{\beta} \left( \int_{\gamma} g(z, \zeta) dz \right) d\zeta = \int_{\gamma} \left( \int_{\beta} g(z, \zeta) d\zeta \right) dz.$$

TODISTUS: Koska  $g$  on jatkuva kompaktissa joukossa  $|\gamma| \times |\beta|$ , on  $g$  tasaisesti jatkuva. Siten kuvaukset

$$\zeta \mapsto \int_{\gamma} g(z, \zeta) dz \quad \text{ja} \quad z \mapsto \int_{\beta} g(z, \zeta) d\zeta$$

ovat jatkuvia (HT). Niinpä integraalit ovat hyvin määriteltyjä.

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että  $\beta$  ja  $\gamma$  ovat jatkuvasti differentioituvia — yleinen tapaus saadaan jakamalla  $[a, b]$  ja  $[c, d]$  osaväleihin ja summaamalla. Nyt funktio  $h$ ,

$$h(t, s) := g(\gamma(t), \beta(s))\gamma'(t)\beta'(s),$$

<sup>1</sup>Muista:  $|\gamma| \times |\beta| = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 : z \in |\gamma|, w \in |\beta|\}$ .

on jatkuva suorakaiteessa  $R = [a, b] \times [c, d]$ , joten yhtälöstä (1.1) seuraa, että

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \left( \int_{\gamma} g(z, \zeta) dz \right) d\zeta &= \int_c^d \left( \int_a^b g(\gamma(t), \beta(s)) \gamma'(t) dt \right) \beta'(s) ds \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b g(\gamma(t), \beta(s)) \gamma'(t) \beta'(s) dt \right) ds = \int_a^b \int_c^d h(t, s) ds dt \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d g(\gamma(t), \beta(s)) \beta'(s) ds \right) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \left( \int_{\beta} g(z, \zeta) d\zeta \right) dz. \end{aligned}$$

□

**1.7. Lause** (Cauchyn lause). *Olkoon  $\sigma$  sykli avoimessa joukossa  $G$ . Tällöin*

$$\int_{\sigma} f(z) dz = 0 \quad \text{kaikilla analyyttisillä funktioilla } f : G \rightarrow \mathbf{C}$$

*jos ja vain jos  $\sigma$  on nollahomologinen joukossa  $G$ .*

**TODISTUS:** Todistetaan ensin ehdon välttämättömyys. Olkoon  $z_0 \in \mathbf{C} \setminus G$ . Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

on analyyttinen joukossa  $G$ , joten

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - z_0} = n(\sigma, z_0).$$

Niinpä  $\sigma$  on nollahomologinen sykli joukossa  $G$ .

Käydään sitten ehdon riittävyyden kimppuun. Olkoon  $\sigma$  nollahomologinen sykli joukossa  $G$ . Määritellään

$$V = \{z \in \mathbf{C} \setminus |\sigma| : n(\sigma, z) = 0\}.$$

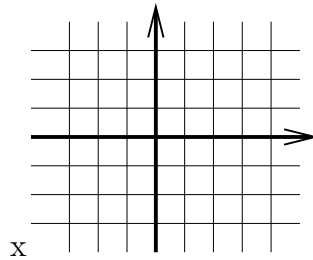
Koska  $n(\sigma, \cdot)$  on vakio joukon  $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$  komponenteissa (yksityiskohdat HT—muista Lemma KA1.5.4), on  $V$  yhdiste joukon  $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$  komponentteja. Siten  $V$  on avoin.

Toisaalta  $V$  sisältää joukon  $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$  rajoittamattoman komponentin Lemman KA1.5.4 nojalla. Oletuksen nojalla  $\mathbf{C} \setminus G \subset V$ . Siten  $K := \mathbf{C} \setminus V \subset G$  on suljettu ja rajoitettu eli kompakti. Lisäksi  $|\sigma| \subset K$ .

Olkoon  $0 < \delta < \text{dist}(K, \partial G)$ . Tällöin  $B(z, \delta) \subset G$  kaikilla  $z \in K$ . Jaetaan  $\mathbf{C}$  sisuksiltaan pistevieraisiin koordinaatiston suuntaisiin (suljettuihin) neliöihin, joiden reunat ovat suorilla

$$x = \frac{n\delta}{2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{n\delta}{2}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

ts. jokaisen neliön sivun pituus on  $\frac{\delta}{2}$  ja neljän kärki on origossa.



Rajoitettu joukko  $K$  kohtaa vain äärellisen monta näistä neliöistä. Olkoot ne  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ . Konstruktiosta seuraa, että jos  $z_j$  on neliön  $Q_j$  keskipiste, niin  $B_j := B(z_j, \frac{\delta}{2}) \subset G$ , sillä muuten olisi  $B(z, \delta) \cap \partial G \neq \emptyset$  kaikilla  $z \in Q_j \cap K$ , mikä on ristiriita. Edelleen  $Q_j \subset B_j$ .

Olkoon nyt  $f$  analyyttinen joukossa  $G$ .

*Väite:*

$$\int_{\sigma} f(z) dz = 0.$$

Olkoon  $k = 1, \dots, r$  ja kiinnitetään  $z \in \text{int } Q_k$ . Sovelletaan nyt lokaalia Cauchyn integraalikaavaa (Lause KA1.5.5) kiekossa  $B_k$ . Saadaan

$$f(z) = \underbrace{n(\partial Q_k, z)}_{=1} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

missä reuna suunnistetaan positiiviseen kiertosuuntaan. Jos  $j \neq k$ , niin lokaalista Cauchyn lauseesta (tapauksessa  $z \notin B_j$ ) tai integraalikaavasta (tapauksessa  $z \in B_j$ ) kiekossa  $B_j$  seuraa, että

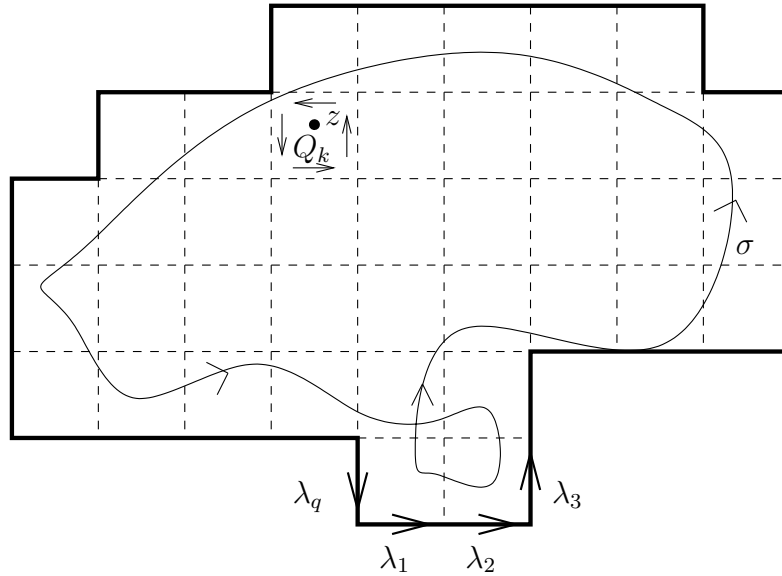
$$0 = \underbrace{n(\partial Q_j, z)}_{=0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$



Siten

$$(*) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^r \int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla  $z \in \text{int } Q_k$ . Yhtälö (\*) pätee kaikilla  $k$ , joten se pätee kaikilla  $z \in \bigcup_{j=1}^r \text{int } Q_j$ .



Olkoon nyt  $\lambda$  yksi tien  $\partial Q_j$  muodostavista suunnatuista janoista. Nyt joko  $|\lambda| \cap K = \emptyset$  tai  $|\lambda| \cap K \neq \emptyset$ .

Jos  $|\lambda| \cap K \neq \emptyset$ , niin  $|\lambda|$  on myös erään toisen neliön  $Q_k$  sivu. Tällöin yhtälön (\*) oikean puolen integraali käy yli teiden  $\lambda$  ja  $\overleftarrow{\lambda}$ , jotka integroitaessa kumoavat toisensa. Siten kaikilla  $z \in \bigcup_{j=1}^r \text{int } Q_j$

$$(**) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^q \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

missä  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  ovat ne neliöiden  $Q_j$  positiivisesti suunnatut reunajanat, joiden jäljet eivät leikkaa joukkoa  $K$ . Lemmasta KA1.5.6 saadaan, että

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

määrittelee analyyttisen funktion, erityisesti siis jatkuvan funktion joukossa  $\mathbf{C} \setminus |\lambda_k|$ . Siten yhtälön (\*\*) oikea puoli määrittelee jatkuvan funktion joukossa

$$\mathbf{C} \setminus \bigcup_{k=1}^q |\lambda_k|.$$

Huomaa, että

$$K \subset \mathbf{C} \setminus \bigcup_{k=1}^q |\lambda_k|.$$

Koska yhtälön (\*\*) vasen puoli on analyyttisenä jatkuva joukossa  $G$ , pätee (\*\*) siis myös niillä neliöiden  $Q_j$  reunojen osilla, jotka eivät kuulu janojen  $\lambda_j$  jälkeksi. Erityisesti, (\*\*) pätee kaikilla  $z \in |\sigma|$ .

Todistuksen lopuksi olkoon  $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ . Nyt

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f(z) dz &\stackrel{(**)}{=} \int_{\sigma} \left( \sum_{k=1}^q \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^q \int_{\gamma_l} \left( \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right) dz \end{aligned}$$

ja koska integrandi on jatkuva joukossa

$$\bigcup_{k,l} |\gamma_l| \times |\lambda_k|,$$

niin lemmän 1.6 mukaan edellinen on yhtä suuri kuin

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^p \int_{\lambda_k} \left( \int_{\gamma_l} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) dz d\zeta &= \sum_{k=1}^q \int_{\lambda_k} f(\zeta) \left( \sum_{l=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} \frac{dz}{\zeta - z} \right) d\zeta \\ &= - \sum_{k=1}^q \int_{\lambda_k} f(\zeta) \left( \sum_{l=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} \frac{dz}{z - \zeta} \right) d\zeta \\ &= - \sum_{k=1}^q \int_{\lambda_k} f(\zeta) n(\sigma, \zeta) d\zeta = 0, \end{aligned}$$

koska  $n(\sigma, \zeta) = 0$  kaikilla  $\zeta \in \lambda_k$ , mikä johtuu siitä, että koska  $|\lambda_k| \cap K = \emptyset$ , niin  $|\lambda_k| \subset V$ .  $\square$

**1.8. Seuraus.** Olkoon  $f$  analyyttinen avoimessa joukossa  $G$  ja  $\sigma_0$  ja  $\sigma_1$   $G$ :ssä homologisia syklejä tai teitä. Tällöin

$$\int_{\sigma_0} f(z) dz = \int_{\sigma_1} f(z) dz.$$

TODISTUS: Jos  $\sigma_0 = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  ja  $\sigma_1 = (\beta_1, \dots, \beta_q)$  syklejä ja homologisia joukossa  $G$ , niin sovelletaan Cauchyn lausetta joukossa  $G$  nollahomologiseen sykliin  $\sigma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p, \overleftarrow{\beta_1}, \dots, \overleftarrow{\beta_q})$ , jolloin

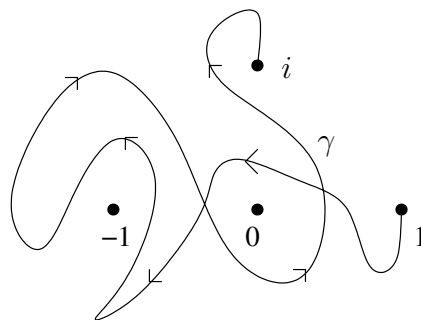
$$\int_{\sigma_0} f(z) dz - \int_{\sigma_1} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz = 0.$$

Jos  $\sigma_0$  ja  $\sigma_1$  ovat teitä, niin samoin väite seuraa soveltamalla Cauchyn lausetta nollahomologiseen sykliin  $(\sigma_0 * \overleftarrow{\sigma_1})$ .  $\square$

**Esimerkki.** Laske integraali

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + z + 1}{z^3 + z^2} dz$$

pitkin tietä  $\gamma$ , joka on kuvattu oheisessa kuvassa.



Tehdään integrandista osamurtokehitemmä. Saadaan

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + z + 1}{z^3 + z^2} dz = \int_{\gamma} \left( \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1} \right) dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1}.$$

Koska  $F(z) = -z^{-1}$  on funktion  $f(z) = z^{-2}$  primitiivi joukossa  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ , ensimmäinen integraali on helppo laskea:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = \int_1^i -\frac{1}{z} = 1 + i.$$

Koska  $\gamma$  on homologinen janan  $\beta = [1, i]$  kanssa joukossa  $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ , jossa myös funktio  $g(z) = (z+1)^{-1}$  on analyyttinen, seuraus 1.8 antaa

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = \int_{\beta} \frac{dz}{z+1} = \int_1^i \text{Log}(z+1) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} - \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi i}{4}.$$

Tässä on hyödynnetty tietoa, että  $G(z) = \text{Log}(z+1)$  on funktion  $g$  primitiivi joukossa  $\mathbf{C} \setminus (-\infty, -1]$ , joka sisältää janan  $\beta = [1, i]$ . Tulokseksi saadaan siis

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + z + 1}{z^3 + z^2} dz = 1 - \ln \sqrt{2} + i\left(1 + \frac{\pi}{4}\right).$$

**1.9. Lause** (Cauchyn integraalikaava). *Olkoon  $f$  analyyttinen joukossa  $G$  ja  $\sigma$  nollahomologinen sykli joukossa  $G$ . Tällöin*

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla  $z \in G \setminus |\sigma|$ .

TODISTUS: Vertaa Cauchyn lokaalin version (Lause KA1.5.5) todistukseen.

Olkoon  $z \in G \setminus |\sigma|$  ja määritellään  $g : G \rightarrow \mathbf{C}$ ,

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{kun } \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{kun } \zeta = z. \end{cases}$$

Tällöin  $g$  on jatkuva joukossa  $G$  ja analyyttinen joukossa  $G \setminus \{z\}$ . Nyt Lauseesta KA1.5.10 seuraa, että  $f$  on analyyttinen joukossa  $G$ . Niinpä Cauchyn lauseen nojalla

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\sigma} g(\zeta)d\zeta = \int_{\sigma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i n(\sigma, z)f(z). \end{aligned}$$

□

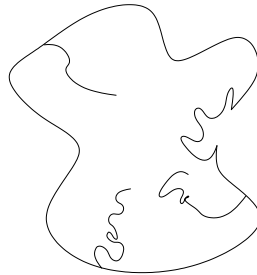
**1.10. Lause.** Olkoon  $f$  analyyttinen ja  $\sigma$  nollahomologinen sykli joukossa  $G$ . Tällöin kaikilla  $k = 1, 2, \dots$

$$n(\sigma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta,$$

kun  $z \in G \setminus |\sigma|$ .

TODISTUS: Kuten lauseen KA1.5.11 todistus, HT. □

**1.11. Määritelmä.** Alue  $D \subset \mathbf{C}$  on *yhdesti yhtenäinen*, jos jokainen joukon  $D$  suljettu tie  $\gamma$  (ja siten jokainen sykli) on nollahomologinen joukossa  $D$ .



**1.12. Huomautus.** Cauchyn lauseen ja integraalikaavan väitteet pätevät kaikille sykleille yhdesti yhtenäisissä alueissa.

**1.13. Huomautus.** Rajoitettu alue  $D$  on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos  $\mathbf{C} \setminus D$  on yhtenäinen (HT).

Rajoittamaton alue  $D \neq \mathbf{C}$  on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain, jos joukon  $\mathbf{C} \setminus D$  kaikki komponentit ovat rajoittamattomia (HT).

**1.14. Lause.** Olkoon  $D \subset \mathbf{C}$  alue. Jokaisella analyyttisellä funktiolla  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  on primitiivi alueessa  $D$ , jos ja vain jos  $D$  on yhdesti yhtenäinen.

TODISTUS: Olkoon  $D$  yhdesti yhtenäinen alue ja  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  analyyttinen. Tällöin Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{kaikilla suljetuilla teillä } \gamma, \quad |\gamma| \subset D.$$

Nyt Lauseen KA1.4.5 nojalla funktiolla  $f$  on primitiivi alueessa  $D$  (toisin sanoen, on olemassa analyyttinen funktio  $F : D \rightarrow \mathbf{C}$  siten, että  $F'(z) = f(z)$  kaikilla  $z \in D$ ).

Olkoon sitten  $\gamma$  suljettu tie joukossa  $D$  ja  $z_0 \in \mathbf{C} \setminus D$ . Nyt funktio

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

on analyyttinen alueessa  $D$ , joten sillä on primitiivi siellä. Siispä Lauseen KA1.3.15 nojalla

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = n(\gamma, z_0).$$

Tie  $\gamma$  on siis nollahomologinen, joten  $D$  on yhdesti yhtenäinen. □

**1.15. Lause.** *Yhdesti yhtenäisessä alueessa  $D$  on logaritmin haara, jos  $0 \notin D$ .*

TODISTUS: Lauseesta 1.14 seuraa, että funktiolla  $\frac{1}{z}$  on primitiivi  $f$  alueessa  $D$ . Kiinnitetään  $z_0 \in D$  ja asetetaan

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) - f(z_0) + \text{Log } z_0 \\ F(z) &= ze^{-g(z)} \end{aligned}$$

Nyt  $g$  ja  $F$  ovat analyyttisiä ja  $g$  on funktion  $\frac{1}{z}$  primitiivi, koska  $g'(z) = \frac{1}{z}$ . Edelleen

$$F'(z) = e^{-g(z)} \left(1 - z \frac{1}{z}\right) = 0.$$

Siten  $F$  on vakio ja koska

$$F(z_0) = z_0 e^{-g(z_0)} = z_0 e^{-\text{Log } z_0} = \frac{z_0}{z_0} = 1,$$

on  $F(z) = 1$  kaikilla  $z \in D$ . Toisin sanoen  $z = e^{g(z)}$  kaikilla  $z \in D$  eli  $g$  on logaritmin haara alueessa  $D$ . □

## 2. Analyttisen funktion potenssarjaesitys

### 2.1. Kompleksisista sarjoista

**2.1. Määritelmä.** Olkoon  $z_n \in \mathbf{C}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Kompleksinen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

*suppenee* (kohti lukua  $s \in \mathbf{C}$ ), jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k z_n \quad (= s \in \mathbf{C}).$$

Tällöin merkitään

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ja sanotaan, että  $s$  on sarjan  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  summa. Toisin sanoen, jos

$$s_k = \sum_{n=1}^k z_n,$$

niin

$$\text{sarja } \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ suppenee,}$$

jos ja vain jos osasummien  $s_k$  muodostama jono  $(s_k)_{k=1}^{\infty}$  suppenee.

Jos sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  ei suppene, se *hajaantuu*.

Sanotaan, että sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  *suppenee itseisesti*, jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ suppenee.}$$

## 2.2. Huomautus (Muutama harjoitustehtävä).

- Jos  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  suppenee itseisesti, niin  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  suppenee.
- Jos  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  ja  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  suppenevat ja  $c \in \mathbf{C}$ , niin  $\sum_{n=1}^{\infty} (cz_n + w_n)$  suppenee kohti lukua  $c \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ .
- Jos  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  ja  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  suppenevat itseisesti ja  $c \in \mathbf{C}$ , niin  $\sum_{n=1}^{\infty} (cz_n + w_n)$  suppenee itseisesti kohti lukua  $c \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ .

Jatkossa tarvitaan muutakin indeksointia kuin  $\sum_{n=1}^{\infty}$ . Nämä, esimerkiksi  $\sum_{n=-k}^{\infty}$ , määritellään luonnollisella tavalla.

**Esimerkki.** Tutkitaan geometrista sarjaa  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ,  $z \in \mathbf{C}$ . Sarjan osasumma on

$$s_k = 1 + z + \cdots + z^k.$$

Huom! Tässä yhteydessä ja jatkossa merkitään  $0^0 = 1$ .

Jos  $z = 1$ , niin  $s_k = k + 1 \rightarrow \infty$  ja sarja hajaantuu.

Jos  $z \neq 1$ , niin kaavasta

$$1 - z^{k+1} = (1 - z)(1 + z + \cdots + z^k)$$

saadaan

$$s_k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{k+1}}{1 - z}.$$

Jos  $|z| < 1$ , niin viimeinen termi

$$\frac{z^{k+1}}{1 - z} \rightarrow 0.$$

Jos  $|z| > 1$ , niin

$$\left| \frac{z^{k+1}}{1 - z} \right| \rightarrow \infty.$$



Jos  $|z| = 1$ ,  $z \neq 1$ , niin viimeinen termi kiertää  $1/|1 - z|$ -säteisen kiekon kehällä. Siten raja-arvoa ei ole olemassa, kun  $|z| = 1$ ,  $z \neq 1$ .

Siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{suppenee jos ja vain jos} \quad |z| < 1$$

ja tällöin

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Harjoitustehtävänä voit osoittaa, että suppeneminen on itseistä.

**Funktiojonot.** Sarjateorian kehittelyä varten tarvitaan esitarkasteluja liittyen funktiojonojen (tasaiseen) suppenemiseen. Tulemme nimittäin tarkastelemaan pisteestä  $z \in A \subset \mathbf{C}$  riippuvia osasummia

$$s_k(z) = \sum_{n=1}^k f_n(z),$$

missä  $f_n : A \rightarrow \mathbf{C}$  kullakin  $k \in \mathbf{N}$ . Tähän sovellukseen palataan vasta myöhemmin ja tarkastellaan nyt yleistä tilannetta:

**2.3. Määritelmä.** Olkoon  $A \subset \mathbf{C}$  ja  $s_k : A \rightarrow \mathbf{C}$  kullakin  $k \in \mathbf{N}$ . Funktiojono  $s_k$  suppenee *tasaisesti* joukossa  $A$  (kohti funktiota  $s : A \rightarrow \mathbf{C}$ ), jos kaikilla  $\varepsilon > 0$  on  $N \in \mathbf{N}$ , jolle

$$|s_k(z) - s(z)| < \varepsilon$$

kaikilla  $z \in A$ , kun  $k \geq N$ . Huom! luku  $\varepsilon$  ei siis riipu pisteestä  $z \in A$ .

**2.4. Huomautus.** Jos  $s_k : A \rightarrow \mathbf{C}$  ovat jatkuvia ja  $s_k \rightarrow s$  tasaisesti joukossa  $A$ , niin  $s : A \rightarrow \mathbf{C}$  on jatkuva.

**2.5. Huomautus.** *Muista tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerio:*

Jono  $s_k : A \rightarrow \mathbf{C}$  suppenee tasaisesti joukossa  $A$  (kohti funktiota  $s : A \rightarrow \mathbf{C}$ ) jos ja vain jos kaikilla  $\varepsilon > 0$  on  $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ , jolle

$$\sup_{z \in A} |s_k(z) - s_m(z)| < \varepsilon$$

kun  $k, m \geq N$ .

**2.6. Määritelmä.** Sanotaan, että funktiojono  $s_k : A \rightarrow \mathbf{C}$  suppenee *lokaalisti tasaisesti* joukossa  $A$  (kohti funktiota  $s : A \rightarrow \mathbf{C}$ ), jos  $s_k \rightarrow s$  tasaisesti jokaisessa joukon  $A$  kompaktissa osajoukossa  $K$ .

**Esimerkki.** Tarkastellaan funktioita  $s_k(z) = z^k$ ,  $z \in B(0, 1)$ . Olkoon  $K \subset B(0, 1)$  kompakti joukko, jolloin  $K \subset B(0, r)$  jollakin  $0 < r < 1$ . Oletetaan, että  $\varepsilon > 0$  ja valitaan  $N$  siten, että  $r^N < \varepsilon$ . Nyt

$$|s_k(z) - 0| = |z|^k < r^k \leq r^N < \varepsilon,$$

kaikilla  $z \in K$ , kun ja  $k \geq N$ . Siis  $s_k \rightarrow 0$  tasaisesti joukossa  $K$ . Koska  $K$  oli mielivaltainen kompakti  $A$ :n osajoukko, niin  $s_k \rightarrow 0$  lokaalisti tasaisesti kiekossa  $B(0, 1)$ . Huom! Funktiojono  $s_k$  ei suppene tasaisesti kiekossa  $B(0, 1)$  (HT).

**2.7. Huomautus.** Yksiö  $\{z\}$  on kompakti, joten jos  $s_k \rightarrow s$  lokaalisti tasaisesti, niin  $s_k \rightarrow s$  pisteittäin. Erityisesti lokaalisti tasaisesti suppenevan jonon rajafunktio on yksikäsitteinen.

**2.8. Lemma.** Olkoot  $s_k : G \rightarrow \mathbf{C}$  jatkuvia funktioita,  $k \in \mathbf{N}$ , jotka suppenevat lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa  $G$  (kohden jokin funktiota  $s : G \rightarrow \mathbf{C}$ ). Jos  $\gamma$  on tie joukossa  $G$ , niin

$$\int_{\gamma} s(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} s_k(z) dz.$$

TODISTUS: Harjoitustehtävä; muista, että tien jälki  $|\gamma| \subset G$  on kompakti. □

Analyyttisten funktioiden  $s_k : G \rightarrow \mathbf{C}$  (lokaali) tasainen suppeneminen on niin vahvaa, että derivoimisen ja rajakäynnin järjestys voidaan vaihtaa.

**2.9. Lause.** Oletetaan, että analyyttisten funktioiden  $s_k : G \rightarrow \mathbf{C}$  jono suppenee lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa  $G$  ja kohti funktiota  $s : G \rightarrow \mathbf{C}$ . Tällöin  $s$  on analyyttinen ja  $s_k^{(n)} \rightarrow s^{(n)}$  lokaalisti tasaisesti joukossa  $G$  kaikilla  $n = 0, 1, 2, \dots$

TODISTUS: Koska  $s_k \rightarrow s$  lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa  $G$ , on  $s$  jatkuva joukossa  $G$ . Lemmasta 2.8 ja Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$\int_{\partial R} s(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial R} s_k(z) dz = 0$$

kaikilla suljetuilla suorakaiteilla  $R$  joukossa  $G$ . Niinpä Moreran lauseen KA1.5.9 nojalla  $s : G \rightarrow \mathbf{C}$  on analyyttinen.

Derivaattojen lokaalin tasaisen konvergenssin osoittamiseksi riittää osoittaa, että  $s'_k \rightarrow s'$  lokaalisti tasaisesti (väite seuraa tästä induktiivisesti). Tätä varten riittää osoittaa, että  $s'_k \rightarrow s'$  tasaisesti kiekossa  $B(z_0, r)$ , jolle  $\bar{B} = \bar{B}(z_0, 2r) \subset G$ . (Miksi?) Sovelletaan seuraavaksi Cauchyn estimaattia KA1.5.12 analyyttiseen funktioon  $s_k - s$  kiekossa  $B(z_0, 2r)$ . Siis kaikilla  $z \in B(z_0, r)$

$$\begin{aligned} |s'_k(z) - s'(z)| &\leq \frac{\sup_{\zeta \in \bar{B}} |s(\zeta) - s_k(\zeta)| 2r}{(2r - |z - z_0|)^2} \\ &\leq \underbrace{\frac{2}{r} \sup_{\zeta \in \bar{B}} |s(\zeta) - s_k(\zeta)|}_{\text{ei riipu pisteestä } z} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

koska  $s_k \rightarrow s$  tasaisesti kiekossa  $\bar{B} \subset G$ . Koska viimeinen nollaan suppeneva yläraja ei riipu pisteestä  $z$ , niin  $s'_k \rightarrow s'$  tasaisesti kiekossa  $B(z_0, r)$ .  $\square$

**2.10. Huomautus.** Lause 2.9 ei päde, jos oletetaan vain, että  $s_k \rightarrow s$  pisteittäin, vaikka tiedettäisiin  $s$  analyyttiseksi. Mikäli jono  $s_k$  on lokaalisti tasaisesti rajoitettu, niin Cauchyn estimaatin (Lause KA1.5.12) avulla nähdään, että tällöin pisteittäisestä konvergenssista seuraa lokaalisti tasainen konvergenssi (HT).

**Funktiosarjat.** Olkoon  $f_n : A \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Sanotaan, että funktiosarja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  suppenee (pisteittäin) joukossa  $A$ , jos sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \text{suppenevat jokaisella } z \in A.$$

Sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  suppenee itseisesti joukossa  $A$ , jos  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  suppenee joukossa  $A$ .

Sanotaan, että funktiosarja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  suppenee tasaisesti joukossa  $A$ , jos funktioiden

$$s_k = \sum_{n=1}^k f_n : A \rightarrow \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{N},$$

muodostama jono suppenee tasaisesti joukossa  $A$ . Sanomme, että funktiosarja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa  $A$ , jos funktioiden  $s_k$  (kuten yllä) muodostama jono suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa  $A$ .

**2.11. Huomautus.** Jos funktiosarja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  suppenee tasaisesti joukossa  $A$ , niin funktiojono  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  suppenee tasaisesti joukossa  $A$  kohti nollafunktiota. Tämä seuraa tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteeristä, eli Huomautuksesta 2.5.

**2.12. Lemma.** Olkoot  $f_n : G \rightarrow \mathbf{C}$  jatkuvia, joille sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$$

suppenee lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa  $G$ . Jos  $\gamma$  on tie joukossa  $G$ , niin

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

TODISTUS: Merkitään  $s_k = \sum_{n=1}^k f_n$  kullakin  $k \in \mathbf{N}$ . Oletuksen nojalla jono  $s_k$  jatkuvia funktioita suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa  $G$  kohti funktiota  $f$ . Nyt integraalin lineaarisuuden ja Lemman 2.8 nojalla

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} s_k(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_{\gamma} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

□

**2.13. Lause.** Olkoot  $f_n : G \rightarrow \mathbf{C}$  analyyttisiä, ja sellaisia, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

suppenee lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa  $G$ . Tällöin

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

on analyyttinen joukossa  $G$  ja kaikilla  $k = 1, 2, \dots$  derivaattojen muodostama sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa  $G$  kohti  $f$ :n derivaattaa  $f^{(k)}$ ,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad \text{kun } z \in G.$$

TODISTUS: Seuraa Lauseesta 2.9 soveltamalla derivoinnin lineaarisuutta, HT. □

Seuraava testi on monissa tilanteissa käyttökelpoinen tapa todeta funktiosarjan tasainen (ja itseinen) suppeneminen.

**2.14. Lause** (Weierstrassin M-testi). *Olkoot  $f_n : A \rightarrow \mathbf{C}$  funktioita ja oletetaan, että kaikilla  $n \in \mathbf{N}$  on sellainen  $M_n < \infty$ , että*

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

*kaikilla  $z \in A$ . Jos sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  suppenee, niin funktiosarja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  suppenee itseisesti ja tasaisesti joukossa  $A$ .*

**TODISTUS:** Itseinen suppeneminen on helppo harjoitustehtävä. Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Koska  $\left(\sum_{n=1}^k M_n\right)_k$  on Cauchy-jono, on olemassa luku  $N = N(\varepsilon)$  siten, että

$$\sum_{n=1}^k M_n - \sum_{n=1}^m M_n < \varepsilon$$

kun  $k \geq m \geq N$ . Merkitään

$$s_k = \sum_{n=1}^k f_n : A \rightarrow \mathbf{C}.$$

Nyt kun  $k > m \geq N$ , niin kaikilla  $z \in A$

$$\begin{aligned} |s_k(z) - s_m(z)| &= \left| \sum_{n=m+1}^k f_n(z) \right| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^k |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^k M_n \\ &= \sum_{n=1}^k M_n - \sum_{n=1}^m M_n < \varepsilon. \end{aligned}$$

Siten funktioiden  $s_k$  jono toteuttaa tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerion (katso Huomautus 2.5).  $\square$

**2.15. Määritelmä.** Jos  $a_n \in \mathbf{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , niin määritellään

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) = \inf_n (\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \in [-\infty, \infty]$$

ja

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) = \sup_n (\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \in [-\infty, \infty].$$

**2.16. Huomautus.** Kompleksianalyysi 1 -kurssilta tutun kompleksisen raja-arvon tulkinnan sijaan, jota yleensä käytämme, edellä esiintyvät kaksi raja-arvoa otetaan laajennetulla reaaliakselilla  $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Koska (esimerkiksi)

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

on vähenevä jono lukuja välillä  $(-\infty, \infty]$ , on sillä oltava raja-arvo (laajennetulla reaaliakselilla) ja  $\limsup$  on siten hyvin määritelty. Myös  $\liminf$  on hyvin määritelty.

**2.17. Huomautus.** Jos raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  on olemassa laajennetulla reaaliakselilla, niin

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Esimerkki.** Olkoon

$$a_n = i^{2n}, \quad \text{jolloin} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1 < 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**2.18. Määritelmä.** Olkoon  $z_0 \in \mathbf{C}$ . Funktiosarjoja tyyppiä

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$a_0, a_1, \dots \in \mathbf{C}$ , sanotaan *potenssisarjoiksi pisteen  $z_0$  ympärillä (tai Taylorin sarjoiksi pisteessä  $z_0$ )*. Luvut  $a_n$  ovat potenssisarjan (\*) *kertoimia*. Olkoon

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

jolloin<sup>2</sup>  $0 \leq \rho \leq \infty$  on sarjan (\*) *suppenemissäde*. Tällöin kiekkoa  $B(z_0, \rho)$  sanotaan sarjan (\*) *suppenemiskiekoksi*. Jos  $\rho = \infty$ , niin  $B(z_0, \rho) = \mathbf{C}$ .

---

<sup>2</sup>Määritellään  $\frac{1}{0} := \infty$  ja  $\frac{1}{\infty} := 0$ .

**2.19. Lause.** Olkoon  $\rho$  potenssisarjan  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  suppenemissäde. Tällöin pätee:

- Sarja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  hajaantuu kaikilla  $z$ , joille  $|z - z_0| > \rho$ .
- Jos  $\rho > 0$ , niin sarja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti kiekossa  $B(z_0, \rho)$  ja siten funktio

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

on analyyttinen kiekossa  $B(z_0, \rho)$ . Lisäksi

$$(2.1) \quad f^{(n)}(z_0) = n!a_n.$$

**2.20. Huomautus.** Lause 2.19 ei puhu mitään sarjan suppenemisestä suppene-miskiekon  $B(z_0, \rho)$  reunalla. Sarja voi joko supeta tai hajaantua siellä (HT).

LAUSEEN 2.19 TODISTUS: **1.** Tarkastellaan lukua  $z \in \mathbf{C}$ , jolle  $|z - z_0| = r > \rho$ . Nyt  $r^{-1} < \rho^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Tämä tarkoittaa, että on äärettömän monta indeksiä  $n$ , joille

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r^{-1} \quad \text{eli} \quad |a_n| > r^{-n},$$

joten

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n||z - z_0|^n > r^{-n}r^{-n} = 1$$

äärettömän monella  $n$ . Erityisesti

$$|a_n(z - z_0)^n| \not\rightarrow 0,$$

joten sarja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  hajaantuu.

**2.** Olkoon  $\rho > 0$  ja  $0 < r < \rho$ . Riittää osoittaa, että  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  suppenee itseisesti ja tasaisesti suljetussa kiekossa  $\bar{B}_r := \bar{B}(z_0, r)$ . (Miksi?) Valitaan  $s \in (r, \rho)$ . Koska  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho^{-1} < s^{-1}$ , on  $N \in \mathbf{N}$ , jolle

$$\sqrt[n]{|a_n|} < s^{-1}, \quad \text{kun} \quad n \geq N.$$

Olkoon  $c = \max\{1, |a_0|, |a_1|s, \dots, |a_N|s^N\}$ , jolloin

$$|a_n| \leq cs^{-n} \quad \text{kaikilla } n.$$

Toisin sanoen

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq c \left(\frac{r}{s}\right)^n =: M_n \quad \text{kaikilla } z \in \bar{B}_r.$$

Koska  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  suppenee, sillä  $\frac{r}{s} < 1$ , seuraa Weierstrassin M-testistä 2.14, että sarja

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  suppenee tasaisesti ja itseisesti kiekossa  $\bar{B}_r$ .

**3.** Funktion  $f$  analyttisyyttä ja derivaattoja koskeva väite seuraa lauseesta 2.13; huomaa, että osasummafunktiot  $s_k = \sum_{n=0}^k a_n(z - z_0)^n$  ovat kokonaisia.  $\square$

## 2.2. Potenssisarjakehitelmä

Analyttinen funktio on lokaalisti potenssisarja:

**2.21. Lause** (Potenssisarjakehitelmä). *Olkoon  $f$  analyttinen avoimessa joukossa  $G$  ja  $B = B(z_0, r) \subset G$ . Tällöin funktiolla  $f$  on potenssisarjaesitys pisteen  $z_0$  ympärillä ja  $f$  määrää potenssisarjan yksikäsitteisesti:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in B,$$

missä

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

TODISTUS: *Potenssisarjaesityksen olemassaolo:* Olkoon

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

ja  $z \in B$ . Olkoon  $s$  sellainen, että  $|z - z_0| < s < r$ . Jos  $\zeta \in \partial B(z_0, s)$ , niin

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{s} < \frac{s}{s} = 1,$$



joten geometrisen sarjan summan kaavalla saadaan

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Weierstrassin  $M$ -testin nojalla viimeinen sarja suppenee ( $\zeta$ :n suhteen) lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa  $G \setminus \overline{B}(z_0, |z - z_0|) \supset \partial B(z_0, s)$ , joten jos  $\gamma(t) = z_0 + se^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , niin Cauchyn integraalikaavasta seuraa, että

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Lemman 2.12 nojalla

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right),$$

ja koska Cauchyn integraalikaavan 1.10 mukaan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n,$$

saadaan edellisestä

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

*Potenssisarjan yksikäsitteisyys:* Olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{kaikilla } z \in B.$$

Tällöin sarjan suppenemissäde on vähintään yhtä suuri kuin  $r$  ja lauseesta 2.19 seuraa, että

$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n,$$

mikä todistaa väitteen. □

**Esimerkki.** Etsitään funktion  $f(z) = e^z$  potenssisarjakehitelmä origossa.

Koska  $f^{(n)}(z) = e^z$  kaikilla  $z$ , on  $f^{(n)}(0) = 1$  kaikilla  $n$ , joten

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}.$$

Potenssisarjakehitelmän sovellutuksena todistamme seuraavan yksikäsitteisyyslauseen:

**2.22. Lause.** *Olkoon  $f$  analyyttinen alueessa  $D$ . Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

i)  $f \equiv 0$  alueessa  $D$  (eli  $f(z) = 0$  kaikilla  $z \in D$ ).

ii) Joukolla

$$N = \{z \in D : f(z) = 0\}$$

on kasautumispiste  $D$ :ssä.

iii) On olemassa piste  $z_0 \in D$ , jolle

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

TODISTUS: Selvästi i)  $\Rightarrow$  ii).

Osoitetaan sitten, että ii)  $\Rightarrow$  iii): Olkoon  $z_0 \in D$  joukon  $N$  kasautumispiste. Koska  $f$  on jatkuva, on  $f(z_0) = 0$ . Ellei

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \text{kaikilla } k = 1, 2, 3, \dots$$

niin olkoon

$$k_0 = \min\{k : f^{(k)}(z_0) \neq 0\} \in \mathbf{N}.$$

Tällöin  $f$ :n potenssisarja pisteessä  $z_0$  on

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{missä } a_{k_0} \neq 0.$$

Jos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k_0} (z - z_0)^n,$$

niin  $g$  on analyyttinen eräässä  $z_0$ :n ympäristössä  $B$  ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \quad \text{kaikilla } z \in B.$$

Koska  $g$  on jatkuva ja  $g(z_0) = a_{k_0} \neq 0$ , on olemassa punkteerattu  $z_0$ :n ympäristö  $U^*$ , missä

$$g(z) \neq 0 \quad \text{kaikilla } z \in U^*.$$

Erityisesti

$$0 \neq (z - z_0)^{k_0} g(z) = f(z) \quad \text{kaikilla } z \in U^*,$$

mikä on vastoin tietoa, että  $z_0$  on joukon  $N$  kasautumispiste. Väite iii) seuraa.

Lopuksi osoitamme, että iii)  $\Rightarrow$  i): Olkoon

$$U = \{z \in D : f^{(k)}(z) = 0 \quad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Koska analyyttisen funktion  $f$  kaikki derivaatat ovat jatkuvia (jopa analyyttisiä) on joukko  $U$  suljettu  $D$ :ssä. Koska  $z_0 \in U$ , riittää  $D$ :n yhtenäisyyden tähden osoittaa, että  $U$  on myös avoin: Olkoon  $w \in U$  ja olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n$$

$f$ :n potenssisarjaesitys, joka suppenee kiekossa  $B(w, r) \subset D$ . Lauseen 2.21 nojalla

$$a_n = \frac{f^{(n)}(w)}{n!} = 0 \quad \text{kaikilla } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

joten  $f(z) = 0$  kaikilla  $z \in B(w, r)$  ja siten  $B(w, r) \subset U$ , joka on näin ollen avoin joukko.  $\square$

Kuvausta  $f$  sanotaan *diskreetiksi*, jos jokaisen pisteen alkukuva on diskreetti joukko, ts. sillä ei ole kasautumispistettä  $f$ :n määrittelyjoukossa. Lauseen 2.22 mukaan alueen  $D$  analyyttinen funktio on diskreetti ellei se ole vakiokuvaus.

Lauseen 2.22 nojalla seuraava määritelmä on hyvin asetettu.

**2.23. Määritelmä.** Olkoon  $f$  analyyttinen avoimessa joukossa  $G$  ja  $z_0 \in G$ . Jos  $f(z_0) = 0$  ja  $f \not\equiv 0$  jokaisessa  $z_0$ :n ympäristössä, niin lukua

$$k_0 = \min\{k \in \mathbf{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

sanotaan *nollakohdan  $z_0$  kertaluvuksi*.

**2.24. Lause.** Oletetaan, että  $f$  analyyttinen avoimessa joukossa  $G$ ,  $z_0 \in G$  ja  $k_0 = 1, 2, 3, \dots$ . Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- i) Piste  $z_0$  on  $f$ :n nollakohta, jonka kertaluku on  $k_0$ .
- ii) On olemassa analyyttinen funktio  $g : G \rightarrow \mathbf{C}$ , jolle  $g(z_0) \neq 0$  ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \quad \text{kaikilla } z \in G.$$

TODISTUS: Olkoon  $z_0$   $f$ :n kertalukua  $k_0$  oleva nollakohta ja olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$f$ :n potenssisarjakehitelmä kiekossa  $B(z_0, r) \subset G$ . Tällöin  $a_n = 0$  kaikilla  $n < k_0$ , joten

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k_0}} &= (z - z_0)^{-k_0} \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k_0} (z - z_0)^n, \quad \text{kun } z \in B^*(z_0, r), \end{aligned}$$

missä oikea puoli määrittelee kiekossa  $B(z_0, r)$  analyyttisen funktion, jonka arvo pisteessä  $z_0$  on

$$a_{k_0} = \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!} \neq 0.$$

Siten funktio

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k_0}}, & \text{kun } z \neq z_0 \\ a_{k_0}, & \text{kun } z = z_0, \end{cases}$$

on etsimämme funktio.

Olkoon kääntäen  $g$  analyyttinen funktio, jolle  $g(z_0) \neq 0$  ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \quad \text{kaikilla } z \in G.$$

Tällöin  $f \not\equiv 0$  jokaisessa pisteen  $z_0$  ympäristössä ja kun  $k \leq k_0$ , niin

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \frac{k_0!}{(k_0 - k + n)!} (z - z_0)^{k_0 + n - k} g^{(n)}(z),$$

missä

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}.$$

Siten

$$f^{(k)}(z_0) = \begin{cases} 0, & \text{kun } k < k_0 \\ k_0!g(z_0) \neq 0, & \text{kun } k = k_0, \end{cases}$$

joten  $z_0$  on kertalukua  $k_0$  oleva  $f$ :n nollakohta. □

### 2.3. Laurent-sarjat

Laurent-sarjoja varten tarvitsemme kahteen suuntaan äärettömiä tuplasarjoja:

**2.25. Määritelmä.** *Tuplasarja*  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$  *suppenee*, jos

$$\text{sekä } \sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{ että } \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} \text{ suppenevat.}$$

Tällöin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}.$$

Sarja  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$  *suppenee itseisesti*, jos sekä  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  että  $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$  suppenevat itseisesti.

Sanomme, että sarja  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n 0^n$  hajaantuu, jos  $a_n \neq 0$  jollakin  $n < 0$ .

Tuplafunktiosarjojen *suppeneminen*, *itseinen suppeneminen* ja *(lokaali) tasainen suppeneminen* joukossa  $A$  määritellään analogisella tavalla funktiosarjojen vastavien käsitteiden avulla (kts. s. 16)

**2.26. Määritelmä.** *Laurent-sarja* pisteessä  $z_0 \in \mathbf{C}$  on muotoa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbf{C}$$

oleva tuplafunktiosarja.

Luku

$$\rho_O = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

on Laurent-sarjan  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  *ulkopuolinen suppenemissäde* ja

$$\rho_I = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

sen *sisäpuolinen suppenemissäde*. Kun  $\rho_I < \rho_O$ , sanotaan että

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \rho_I < |z - z_0| < \rho_O\}$$

on kyseisen sarjan *suppenemisrengas*. Jos  $\rho_I = 0$  ja  $\rho_O = \infty$ , niin  $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ .

**2.27. Huomautus.** Taylorin sarja eli tavallinen potenssisarja on Laurent-sarja, kun  $a_n = 0$  kaikilla  $n < 0$ . Sen sisäpuolinen suppenemissäde on 0.

**2.28. Lause.** Olkoon  $\rho_O$  ja  $\rho_I$  Laurent-sarjan  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  ulko- ja sisäpuoliset suppenemissäteet. Sarja hajaantuu, jos

$$|z - z_0| > \rho_O \quad \text{tai} \quad |z - z_0| < \rho_I.$$

Tämän lisäksi Laurent-sarjalla on seuraavat suppenemisominaisuudet:

- Jos  $\rho_O > 0$ , niin  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti kiekossa  $B_O = B(z_0, \rho_O)$  ja määrittelee siten analyyttisen funktion  $f_O$  kiekossa  $B_O$ .
- Jos  $\rho_I < \infty$ , niin  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$  suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa

$$\mathbb{C}B_I = \{z : |z - z_0| > \rho_I\},$$

joten funktio

$$f_I(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

on analyyttinen joukossa  $\mathbb{C}B_I$ .

- Jos  $\rho_I < \rho_O$ , niin tarkastettava Laurent-sarja suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti renkaassa

$$D = \{z : \rho_I < |z - z_0| < \rho_O\}$$

ja siten

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f_I(z) + f_O(z)$$

on analyyttinen joukossa  $D$ . Lisäksi kaikilla  $n \in \mathbf{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kunhan  $\rho_I < r < \rho_O$  ja  $\{z : |z - z_0| = r\}$  on suunnistettu vastapäivään.

TODISTUS: Koska  $\rho_O$  on potenssarjan  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  on suppenemissäde, seuraa sitä ja funktiota  $f_O$  koskevat väitteet lauseesta 2.19.

Sitten tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^n,$$

joka on potenssarja, jonka suppenemissäde on  $1/\rho_I$ . Sarja hajaantuu, jos  $|\zeta| > \frac{1}{\rho_I}$ , ja jos  $\rho_I < \infty$ , suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti kiekossa  $B(0, 1/\rho_I)$ . Merkitään

$$\zeta = \frac{1}{z - z_0},$$

jolloin potenssarjan lokaalisti tasaisesta suppenemisestä seuraa (HT) että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti joukossa  $\{z : |z - z_0| > \rho_I\}$  ja hajaantuu, kun  $|z - z_0| < \rho_I$ . Funktiosta  $f_I$  tulee erityisesti analyyttinen joukossa  $\mathbb{C}B_I$ .

Näistä saadaan, että tuplasarja  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  hajaantuu, jos

$$\text{joko } |z - z_0| > \rho_O \quad \text{tai} \quad |z - z_0| < \rho_I.$$

Jos  $\rho_I < \rho_O$  eli  $\rho_O > 0$  ja  $\rho_I < \infty$ , niin yllä olevista tarkasteluista seuraa, että  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti avoimessa renkaassa

$$D = B_O \cap \mathbb{C} \setminus \bar{B}_I$$

ja siellä

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f_O(z) + f_I(z)$$

on analyyttinen.

Olkoon sitten  $\rho_I < r < \rho_O$  ja  $k \in \mathbf{Z}$ . Merkitään

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k-1}, \quad z \in D.$$

Olkoon  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Lemman 2.12 nojalla integroinnin ja summauksen järjestys voidaan vaihtaa, koska sarja suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa  $D \supset |\gamma|$ , ja saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &= a_k, \end{aligned}$$

koska funktiolla  $(z - z_0)^{n-k-1}$  on primitiivi, paitsi jos  $n = k$ . □

Kääntäen, rengasalueessa analyyttisellä funktiolla on Laurentin sarjakehitelmä:

**2.29. Lause** (Analyyttisen funktion Laurentin sarjakehitelmä). *Oletetaan, että  $0 \leq a < b \leq \infty$ . Olkoon  $f$  analyyttinen renkaassa*

$$D = \{z \in \mathbf{C} : a < |z - z_0| < b\}.$$

Tällöin  $f$  voidaan esittää Laurent-sarjana joukossa  $D$ ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in D.$$



Esitys on yksikäsitteinen: kaikilla  $n \in \mathbf{Z}$

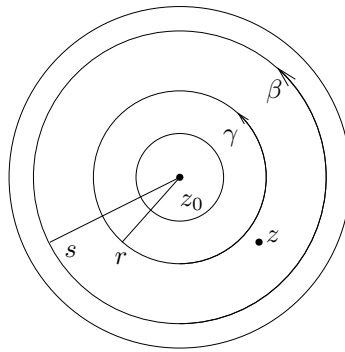
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

kunhan  $a < r < b$  ja ympyrä on  $\{|z-z_0|=r\}$  suunnistettu vastapäivään.

TODISTUS: Valitaan  $r_0 \in (a, b)$ . Olkoon

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-z_0|=r_0\}} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Huomaa, että Cauchyn lauseen perustella säteen  $r_0$  valinnalla ei ole merkitystä, koska kahden eri säteisen ympyränkehän kiertävät tiit ovat homologiaisia  $D$ :ssä.



Olkoon  $z \in D$ . Valitaan  $r, s$ , joille  $a < r < |z-z_0| < s < b$ . Olkoon

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= z_0 + r e^{it}, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \beta(t) &= z_0 + s e^{it}, & 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Tällöin sykli  $\sigma = (\beta, \overleftarrow{\gamma})$  on nollahomologinen joukossa  $D$  ja  $n(\sigma, z) = 1$ , joten Cauchyn integraalikaavasta 1.9 seuraa, että

$$(*) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nyt jatketaan kuten potenssisarjaesityksen todistuksessa (katso lause 2.21). Jos  $\zeta \in |\beta|$ , niin

$$\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{s} < 1,$$

joten

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

Weierstrassin  $M$ -testin nojalla suppeneminen on ( $\zeta$ :n suhteen) lokaalisti tasaista joukossa  $D \setminus \overline{B}(z_0, |z-z_0|) \supset |\beta|$  joten Lemmasta 2.12 seuraa, että

$$\begin{aligned} (**) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)}_{=a_n} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Samaan tapaan  $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r}{|z - z_0|} < 1$  kaikilla  $\zeta \in |\gamma|$  ja

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{f(\zeta)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

Weierstrassin  $M$ -testin nojalla suppeneminen on ( $\zeta$ :n suhteen) lokaalisti tasaista joukossa  $D \cap B(z_0, |z-z_0|) \supset |\gamma|$ , joten

$$\begin{aligned} (***) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= -\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \right)}_{=a_{-n}} (z - z_0)^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}. \end{aligned}$$

Nyt siis tuplasarja  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  suppenee renkaassa  $D$  ja yhtälöistä (\*), (\*\*) ja (\*\*\*) seuraa, että

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n - \left( -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

kaikilla  $z \in D$ .

Yksikäsitteisyys seuraa lauseesta 2.28 kuten potenssisarjan tapauksessa, HT.  $\square$

**Esimerkki.** Olkoon  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ , jolloin  $f$  on analyyttinen joukossa  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ . Koska

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C},$$

saamme

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Tämä on  $f$ :n Laurent-sarja, mikä on yksikäsitteinen.

### 3. Eristetyt erikoispisteet ja residylause

#### 3.1. Erikoispisteet

Funktiolla  $f$  on *eristetty erikoispiste* (tai lyhyemmin: *erikoispiste*)  $z_0 \in \mathbf{C}$ , jos on olemassa sellainen  $r > 0$ , että  $f$  on analyyttinen punkteeratussa kiekossa

$$B^* = B^*(z_0, r) = B(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Sanotaan, että  $f$  on *analyyttinen (avoimessa joukossa)  $G$  lukuunottamatta eristettyjä erikoispisteitä*, jos on eristettyjen erikoispisteiden joukko  $E \subset G$  siten, että joukolla  $E$  ei ole kasautumispisteitä joukossa  $G$  ja  $f$  on analyyttinen joukossa  $G \setminus E$ .

Olkoon funktiolla  $f$  eristetty erikoispiste  $z_0$  ja valitaan sellainen  $r > 0$ , että  $f$  on analyyttinen punkteeratussa kiekossa  $B^* = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ . Lauseen 2.29 mukaan funktiolla  $f$  on yksikäsitteinen Laurent-sarja, eli

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

kaikilla  $z \in B^*$ .

Luokitellaan erikoispisteet:

- $z_0$  on funktion  $f$  *poistuva erikoispiste*, jos  $a_n = 0$  kaikilla  $n < 0$ .
- $z_0$  on funktion  $f$  *napa*, jos on  $k < 0$  siten, että  $a_k \neq 0$ , mutta  $a_k \neq 0$  vain äärellisen monella  $k < 0$ .
- $z_0$  on funktion  $f$  *oleellinen erikoispiste*, jos  $a_k \neq 0$  äärettömän monella  $k < 0$ .

**Esimerkki.** Origo (eli piste 0) on

funktion  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  poistuva erikoispiste,

funktion  $g(z) = \frac{1}{z}$  napa

ja funktion  $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$  oleellinen erikoispiste.

**3.1. Huomautus** (Tärkeä!). Piste  $z_0$  on funktion  $f$  poistuva erikoispiste, jos ja vain jos

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{kun } z \neq z_0 \\ a_0, & \text{kun } z = z_0, \end{cases}$$

on hyvin määritelty ja analyttinen pisteen  $z_0$  ympäristössä; tässä esiintyvä luku  $a_0$  on  $f$ :n Laurent-sarjan 0. kerroin.

**3.2. Huomautus.** Olkoon  $z_0$  funktion  $f$  erikoispiste. Sanotaan, että

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

on funktion  $f$  Laurent-sarjan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

*singulaariosa*. Tällöin  $S$  on analyttinen joukossa  $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$  (ylim. HT).

Lisäksi  $z_0$  on funktion  $f - S$  erikoispiste. Se on kuitenkin poistuva, koska

$$f(z) - S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

jossakin pisteen  $z_0$  punkteeratussa ympäristössä.

**3.3. Huomautus.** Funktion  $f$  singulaariosassa esiintyvä kerroin  $a_{-1}$  on erikoisroolissa. Oletetaan, että  $z_0$  on funktion  $f$  erikoispiste ja sanotaan että

$$a_{-1} =: \text{Res}(f, z_0)$$

on funktion  $f$  *residy* pisteessä  $z_0$ . Jos  $r > 0$  on riittävän pieni, niin Lauseen 2.29 nojalla

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-z_0|=r\}} f(z) dz,$$

missä ympyränkehä on suunnistettu vastapäivään.

### 3.2. Poistuvat erikoispisteet

Seuraavaksi karakterisoimme poistuvat erikoispisteet. Alla esitetty tulos on varsin käyttökelpoinen monissa tilanteissa.

**3.4. Lause** (Riemannin jatkolause). *Olkoon funktiolla  $f$  eristetty erikoispiste  $z_0$ . Tällöin seuraavat ovat yhtäpitävät:*

- i) *Piste  $z_0$  on poistuva erikoispiste.*
- ii) *On  $r > 0$ , jolle  $f$  on rajoitettu punkteeratussa kiekossa*

$$B^* = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

- iii) *Pätee:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

TODISTUS: i)  $\Rightarrow$  ii). Harjoitustehtävä.

- ii)  $\Rightarrow$  iii). Olkoon  $M, r > 0$  siten, että

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{kun } z \in B^* = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Nyt

$$|z - z_0||f(z)| \leq M|z - z_0| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

- iii)  $\Rightarrow$  i). Määritellään

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z), & \text{kun } z \neq z_0 \\ 0, & \text{kun } z = z_0. \end{cases}$$

Koska  $g$  on jatkuva kiekossa  $B = B(z_0, r)$  pienellä  $r > 0$  ja analyyttinen punkteeratussa kiekossa  $B^*(z_0, r)$ , seuraa Lauseesta KA1.5.10, että  $g$  on analyyttinen koko kiekossa  $B$ . Niinpä kun  $z \neq z_0$ ,

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}g(z) = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$
$$\stackrel{b_0 = g(z_0) = 0}{=} \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}(z - z_0)^n,$$

mikä on Laurentin sarja, jossa singulaarinen osa on 0. Siten  $z_0$  on poistuva.  $\square$

### 3.3. Navat

**3.5. Määritelmä.** Olkoon  $z_0$  funktion  $f$  napa ja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Tällöin luku

$$k = -\min\{n < 0 : a_n \neq 0\}$$

on *navan*  $z_0$  *kertaluku*.

**3.6. Lause.** Olkoon  $k \in \mathbf{N}$  ja  $f$  analyyttinen punkteeratussa kiekossa  $B^* = B^*(z_0, r)$ . Tällöin  $z_0$  on funktion  $f$   $k$ . kertaluvun napa jos ja vain jos on olemassa analyyttinen funktio  $g$  kiekossa  $B(z_0, r)$  siten, että  $g(z_0) \neq 0$  ja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad \text{kaikilla } z \in B^*.$$

TODISTUS: Todistetaan ensin ehdon välttämättömyys. Kaikilla  $z \in B^*$

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_{-k} \neq 0.$$

Määritellään

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z - z_0)^n.$$

Tällöin  $g$  on analyyttinen kiekossa  $B(z_0, r)$ , sillä sarja suppenee kiekossa  $B(z_0, r)$ . Lisäksi  $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$ . Nyt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{-k} g(z). \end{aligned}$$

Seuraavaksi todistetaan ehdon riittävyys. Kun

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad b_0 \neq 0,$$

ja

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z),$$

niin

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n,$$

mikä on funktion  $f$  Laurentin sarja, jonka  $-k$ . kerroin on  $b_0 \neq 0$ . □

**3.7. Huomautus (Tärkeä!).** Olkoon  $z_0$  funktion  $f$   $k$ . kertaluvun napa ja  $g$  pisteen  $z_0$  ympäristössä analyyttinen siten, että kaikilla  $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

mikä on funktion  $f$  Laurentin sarja. Tässä termin  $(z - z_0)^{-1}$  kerroin on

$$b_{-1+k} = b_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

eli

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

Koska  $f$  ei ole määritelty pisteessä  $z_0$ , on tämä parasta kirjoittaa muodossa: Jos  $z_0$  on funktion  $f$   $k$ . kertaluvun napa, niin

$$(3.1) \quad \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)).$$

Erityisesti, jos  $z_0$  on 1. kertaluvun napa, on

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$



**Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} = \frac{1}{z} g(z),$$

missä  $g$  on analyyttinen ja  $g(0) \neq 0$ . Siten funktiolla  $f$  on 1. kertaluvun napa pisteessä 0 ja

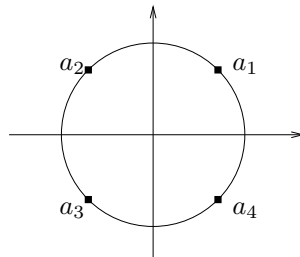
$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{\frac{d}{dz}(e^z)|_{z=0}} = 1.$$

**3.8. Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^4},$$

jolloin funktiolla  $f$  on navat

$$a_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad a_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad a_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{ja} \quad a_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$



Selvästi navat  $a_n$  ovat yksinkertaisia (HT). Niinpä

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, a_1) &= \lim_{z \rightarrow a_1} (z - a_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow a_1} \frac{z^2}{(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)} \\ &= \frac{a_1^2}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} = \sqrt{2} \frac{2i}{2i \cdot 2(1+i) \cdot 2i} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4(i+1)} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Samoin

$$\text{Res}(f, a_2) = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3i\pi}{4}}.$$

Residyit navoissa  $a_3$  ja  $a_4$  voidaan selvittää vastaavasti.

**3.9. Lause.** Olkoon  $z_0$  funktion  $f$  eristetty erikoispiste. Tällöin

- i) piste  $z_0$  on funktion  $f$  napa jos ja vain jos  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .
- ii) piste  $z_0$  on  $k$ . kertaluvun napa jos ja vain jos  $k$  on se positiivinen kokonaisluku, jolle

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^k |f(z)| \in ]0, \infty[.$$

TODISTUS: Olkoon  $z_0$  funktion  $f$   $k$ . kertaluvun napa. Tällöin on olemassa pisteen  $z_0$  ympäristössä analyttinen funktio  $g$  siten, että  $g(z_0) \neq 0$  ja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}.$$

Niinpä

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \right| = \infty,$$

koska  $g(z_0) \neq 0$ . Myöskin on

$$|z - z_0|^l |f(z)| = |z - z_0|^{l-k} |g(z)| \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{jos } l < k \\ |g(z_0)| \in (0, \infty), & \text{jos } l = k \\ 0, & \text{jos } l > k. \end{cases}$$

Tämä todistaa molempien väitteiden "vain jos" puolet.

Olkoon sitten

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty \quad \text{ja} \quad h = \frac{1}{f}.$$

Nyt  $h$  on rajoitettu ( $|h| \leq 1$ ) pisteen  $z_0$  ympäristössä, joten  $z_0$  on funktiolle  $h$  poistuva erikoispiste ja

$$h(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0.$$

Koska  $h \not\equiv 0$ , niin jos

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

on funktion  $h$  potenssisarjakehitelmä, niin  $b_0 = 0$ , mutta

$$k := \min\{n \in \mathbf{N} : b_n \neq 0\} \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Siten funktio

$$g(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z - z_0)^n}$$

on analyyttinen pisteen  $z_0$  ympäristössä ja

$$g(z_0) = \frac{1}{b_k} \neq 0.$$

Niinpä

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{\sum_{n=k}^{\infty} b_n(z - z_0)^n} = \frac{1}{(z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z - z_0)^n} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}.$$

Lauseen 3.6 mukaan  $z_0$  on funktion  $f$  napa, jonka kertaluku on  $k$ . mistä seuraa ensimmäisen väitteen ”jos” osa.

Lopuksi, jos tiedetään, että

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^k |f(z)| = a \in (0, \infty)$$

jollakin  $k \in \mathbf{N}$ , niin

$$|f(z)| \rightarrow \infty, \text{ kun } z \rightarrow z_0,$$

ja ylläoleva todistus osoittaa, että  $z_0$  on napa, jonka kertaluku on  $k$  (huomaa, että  $1/|b_k| = a$ ).  $\square$

### 3.4. Oleellisista erikoispisteistä

Analyyttisen funktion käyttäytyminen oleellisen erikoispisteen ympäristössä on villiä. Pätee **Picardin (suuri) lause**: *Jos  $z_0$  on analyyttisen funktion  $f$  oleellinen erikoispiste, niin joukossa  $\mathbf{C} \setminus f(B^*(z_0, r))$  on korkeintaan yksi piste, oli  $r > 0$  miten pieni hyvänsä.*

Emme kuitenkaan todista tätä syvällistä lausetta, vaan samansuuntaisen, mutta heikomman (ja helpomman) tuloksen.

**3.10. Lause (Casorati-Weierstrass).** *Jos  $z_0$  on punkteeratussa kiekossa  $B^*(z_0, r)$  analyyttisen funktion  $f$  oleellinen erikoispiste, niin kuvajoukko  $f(B^*(z_0, r))$  on tiheä  $\mathbf{C}$ :ssä, ts.*

$$\overline{f(B^*(z_0, r))} = \mathbf{C}.$$

TODISTUS: Jos kuvajoukko ei olisi tiheä, niin sen komplementissa olisi kiekko

$$B(w, \varepsilon) \cap f(B^*(z_0, r)) = \emptyset.$$

Silloin funktio

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

olisi analyyttinen punkteeratussa kiekossa  $B^*(z_0, r)$ . Lisäksi  $g$  on rajoitettu, koska

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{1}{|f(z) - w|} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

joten Riemannin jatkolauseen 3.4 nojalla  $z_0$  on  $g$ :n poistuva erikoispiste. Siten koska  $g$ :llä on raja-arvo  $z_0$ :ssa, on  $z_0$  funktion  $1/g$  poistuva erikoispiste tai napa. Näin ollen  $z_0$  on funktion

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

erikoispiste, joka on joko poistuva tai napa, mikä on vastoin oletusta, että  $z_0$  oli  $f$ :n oleellinen erikoispiste.  $\square$

Kokonainen funktio  $f$  on joko polynomi tai sitten sitten sillä on oleellinen erikoispiste äärettömydessä:

**3.11. Lause.** *Olkkoon  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  kokonainen. Tällöin funktiolla*

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

*on oleellinen erikoispiste origossa tai  $f$  on polynomi.*

TODISTUS: Ellei  $f$  ole polynomi, niin  $f$ :llä on potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in C,$$

missä  $a_n \neq 0$  äärettömän monella  $n$ . Siten funktion  $g$  Laurent-sarja on

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^0 b_n z^n, \quad b_n = a_{-n}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{0\},$$

joten koska  $b_n = a_{-n} \neq 0$  äärettömän monella  $n < 0$ , on 0 sen oleellinen erikoispiste.  $\square$

**Esimerkki.** Olkoon  $f$  analyyttinen pisteen  $z_0$  ympäristössä  $B^* = B^*(z_0, r)$ . Oletetaan, että  $f$  ei ole identtisesti nolla joukossa  $B^*$  ja että on olemassa pisteet  $z_n \in B^*$  siten, että  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  ja  $f(z_n) = 0$  kaikilla  $n \in \mathbf{N}$ . (Konkreettisenä esimerkkinä mainitaan funktio

$$f(z) = \cos\left(\frac{1}{z-1}\right),$$

jolla on eristetty erikoispiste  $z_0 = 1$ .)

Tällöin:

- $z_0$  ei voi olla funktion  $f$  poistuva erikoispiste, sillä muuten  $f$  olisi identtisesti nolla joukossa  $B^*$ , kts. Lause 2.22.
- Koska  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = 0 < \infty$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , niin  $z_0$  ei voi olla funktion  $f$  napa, kts. Lause 3.9.

Näin ollen pisteen  $z_0$  on oltava oleellinen erikoispiste (muita vaihtoehtoja ei ole, HT).

### 3.5. Residylause

Residylause antaa tehokkaan työkalun laskea kompleksisia integraaleja.

**3.12 Lause (Residylause).** *Olkoon  $\sigma$  nollahomologinen sykli avoimessa joukossa  $G$  ja  $f$  analyyttinen joukossa  $G$  lukuunottamatta eristettyjen erikoispisteiden joukkoa  $E$ , jolle  $E \cap |\sigma| = \emptyset$ . Tällöin*

$$\int_{\sigma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in E} n(\sigma, a) \operatorname{Res}(f, a).$$

**3.13. Huomautus.** Cauchyn lauseen todistuksessa todettiin, että jos  $\sigma$  on nollahomologinen sykli joukossa  $G$ , niin

$$K_{\sigma} = |\sigma| \cup \{z \in \mathbf{C} \setminus |\sigma| : n(\sigma, z) \neq 0\}$$

on joukon  $G$  kompakti osajoukko. Olkoon  $D \subset\subset G$  avoin ja  $K_{\sigma} \subset D$ . Tällöin  $\sigma$  on nollahomologinen joukossa  $D$ . Koska joukolla  $E$  ei ole kasautumispisteitä joukossa  $G$ , on joukko  $E \cap D = \{z_1, \dots, z_p\}$  äärellinen. Siten summa väitteessä on hyvin määritelty.

$$\sum_{a \in E} n(\sigma, a) \operatorname{Res}(f, a) = \sum_{j=1}^p n(\sigma, z_j) \operatorname{Res}(f, z_j).$$

TODISTUS: Olkoot  $z_1, \dots, z_p$  kuten huomautuksessa, ja  $S_k$  funktion  $f$  singulaariosa pisteessä  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Tällöin  $S_k$  on analyyttinen joukossa  $\mathbf{C} \setminus \{z_k\}$  lauseen 2.28 perusteella ja siis funktiolla  $f - S_k$  on poistuva erikoispiste  $z_k$ . Siten

$$g = f - S_1 - S_2 - \dots - S_p$$

on analyyttinen joukossa  $D$  lukuunottamatta poistuvia erikoispisteitä  $z_1, \dots, z_p$ . Koska nämä ovat poistuvia, voidaan olettaa, että  $g$  on analyyttinen koko  $D$ :ssä. Nyt Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$0 = \int_{\sigma} g(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz - \sum_{k=1}^p \int_{\sigma} S_k(z) dz$$

eli

$$(*) \quad \int_{\sigma} f(z) dz = \sum_{k=1}^p \int_{\sigma} S_k(z) dz.$$

Jos nyt

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

on funktion  $f$  singulaariosa mielivaltaisessa pisteessä  $z_0 \in E$ , niin sarja  $S$  suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa  $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ . Erityisesti se suppenee tasaisesti syklin  $\sigma$  jäljellä. Siten

$$\int_{\sigma} S(z) dz = \int_{\sigma} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_{\sigma} \frac{dz}{(z - z_0)^n},$$

missä käytettiin lemmaa 2.12. Koska funktiolla  $(z - z_0)^{-n}$  on primitiivi, kun  $n > 1$ ,

$$\int_{\sigma} (z - z_0)^{-n} dz = 0, \quad \text{kun } n > 1,$$

joten saadaan

$$\int_{\sigma} S(z) dz = a_{-1} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) n(\sigma, z_0).$$

Nyt yhtälöstä (\*) seuraa, että

$$\int_{\sigma} f(z) dz = \sum_{k=1}^p \int_{\sigma} S_k(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^p n(\sigma, z_k) \operatorname{Res}(f, z_k).$$

□

Residylauseetta voidaan soveltaa myös reaalisten integraalien laskemiseen, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki.** Osoita, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ensiksi todetaan, että integraali suppenee, koska

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Olkoon

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4},$$

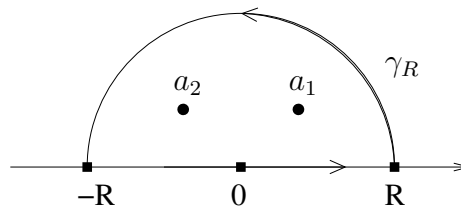
jolloin funktiolla  $f$  on navat

$$a_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad a_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad a_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{ja} \quad a_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Esimerkin 3.8 laskun nojalla

$$\operatorname{Res}(f, a_1) = \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}, \quad \operatorname{Res}(f, a_2) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3i\pi}{4}}.$$

Olkoon  $R > 1$  ja  $\gamma_R$  puolipallon  $B(0, R) \cap \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$  reuna vastapäivään.



Residylauseesta seuraa, että

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \operatorname{Res}(f, a_1) + \operatorname{Res}(f, a_2) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Koska

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^3 e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt,$$

niin

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx \stackrel{(*)}{=} \frac{\pi}{\sqrt{2}} - iR^3 \int_0^\pi \frac{e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt.$$

Kun  $t \in [0, \pi]$ , niin  $|1 + R^4 e^{4it}| = R^4$ , joten kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$|1 + R^4 e^{4it}| \geq R^4 - 1,$$

kun  $R > 1$ , joten

$$\left| R^3 \int_0^\pi \frac{e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt \right| \leq \frac{R^3}{R^4 - 1} \int_0^\pi \underbrace{|e^{3it}|}_{=1} dt = \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \rightarrow 0,$$

kun  $R \rightarrow \infty$ . Niinpä

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} iR^3 \int_0^\pi \frac{e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt}_{=0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

**3.14. Huomautus.** Määrittäessä integraaleja kuten edellä raja-arvoin  $R \rightarrow \infty$ , on todettava, että integrandit suppenevat itseisesti! Vertaa huomautukseen tuplasarjojen kohdalla.



## 4. Analyttisen funktion kuvausominaisuuksia

### 4.1. Argumentin periaate ja Hurwitzin lause

**4.1. Lause.** (Argumentin periaate). Olkoon  $f$  alueessa  $D$  analyttinen funktio, jonka nollakohdat ovat  $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ . Olkoon  $k_j \in \mathbf{N}$  nollakohdan  $a_j$  kertaluku ja  $\sigma$  nollahomologinen sykli  $D$ :ssä. Jos  $a_j \notin |\sigma|$  kaikilla  $j$ , niin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n k_j n(\sigma, a_j).$$

**TODISTUS:** Olkoon  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Lauseen 2.24 nojalla on olemassa alueessa  $D$  analyttinen funktio  $g$  ja  $r > 0$ , joille  $g(a_j) \neq 0$  ja  $f(z) = (z - a_j)^{k_j} g(z)$  kaikilla  $z \in B(a_j, r)$ . Lisäksi voimme olettaa, että  $g(z) \neq 0$  kaikilla  $z \in B(a_j, r)$ , joten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_j(z - a_j)^{k_j-1} g(z)}{(z - a_j)^{k_j} g(z)} + \frac{(z - a_j)^{k_j} g'(z)}{(z - a_j)^{k_j} g(z)} = \frac{k_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

kun  $z \in B^*(a_j, r)$ . Koska funktio  $g'/g$  on analyttinen pisteen  $a_j$  ympäristössä, niin  $\text{Res}(f'/f, a_j) = k_j$ .

Residylauseen nojalla

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n n(\sigma, a_j) \text{Res}(f'/f, a_j) = \sum_{j=1}^n k_j n(\sigma, a_j)$$

kuten haluttiin. □

Soveltamalla Lausetta 4.1 funktioon  $f(z) - w_0$  saadaan:

**4.2. Lause.** Olkoon  $f$  alueessa  $D$  analyttinen funktio ja olkoot  $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$  ne pisteet, joilla  $f(z) = w_0$ . Olkoon  $k_j \in \mathbf{N}$   $w_0$ -kohdan  $a_j$  kertaluku (so. funktion  $f - w_0$  nollakohdan kertaluku) ja  $\sigma$  nollahomologinen sykli  $D$ :ssä. Jos  $a_j \notin |\sigma|$  kaikilla  $j = 1, 2, \dots, n$ , niin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \sum_{j=1}^n k_j n(\sigma, a_j).$$

**Esimerkki.** Jos  $\gamma(t) = 2e^{i2\pi t}$ ,  $t \in [0, 1]$ , niin

$$\int_{\gamma} \frac{2z + 1}{z^2 + z + 1} dz = 4\pi i,$$

koska nimittäjän molemmat nollakohdat  $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$  ovat yksikkökierokkeen kehällä

**4.3. Esimerkki.** Olkoon  $\gamma$  nollahomologinen suljettu tie alueessa  $D$  ja  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  analyyttinen. Olkoon  $w_0 \in \mathbf{C} \setminus f(|\gamma|)$  ja  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ne  $D$ :n pisteet  $z \in D$ , joille  $f(z) = w_0$ . Jos  $k_j \in \mathbf{N}$  on  $w_0$ -kohdan  $a_j$  kertaluku ja  $\sigma = f \circ \gamma$ , niin  $\sigma$  on suljettu tie ja

$$n(\sigma, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{1}{w - w_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \sum_{j=1}^n k_j n(\gamma, a_j),$$

missä keskimmäisen yhtäsuuruuden näkee helposti muuttujanvaihdolla (HT).

**4.4. Lause.** (Hurwitzin lause). Jos alueessa  $D$  analyyttiset funktiot  $f_j$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , suppenevat  $D$ :ssä lokaalisti tasaisesti kohti funktiota  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  ja  $f_j(z) \neq 0$  kaikilla  $j \in \mathbf{N}$  ja  $z \in D$ , niin joko  $f \equiv 0$  tai  $f(z) \neq 0$  kaikilla  $z \in D$ .

TODISTUS: Oletetaan, että  $f$  ei ole identtisesti nolla alueessa  $D$ , mutta on olemassa funktion  $f$  kertalukua  $k_0$  oleva nollakohta  $z_0 \in D$ . Lauseen 2.22 nojalla on olemassa  $r > 0$  siten, että  $B(z_0, 2r) \subset D$  ja  $f$  ei saa arvoa nolla joukossa  $B(z_0, 2r) \setminus \{z_0\}$ . Argumentin periaatteen nojalla (sovellettuna kiekossa  $B(z_0, 2r)$ ) saamme

$$\int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i k_0 \neq 0.$$

Toistaalta koska  $f_j$  ei häviä alueessa  $D$ , niin

$$\int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} dz = 0$$

kaikilla  $j$ . Koska jonot  $f_j$  ja  $f_j'$  suppenevat  $D$ :ssä lokaalisti tasaisesti kohti vastaavia rajafunktioita  $f$  ja  $f'$ , ja funktio  $f$  ei häviä kompaktissa joukossa  $\{|z - z_0| = r\}$ , niin  $f_j'/f_j$  suppenee tasaisesti joukossa  $\{|z - z_0| = r\}$  kohti rajafunktiota  $f'/f$  (HT). Siten

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} dz = \int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i k_0 \neq 0,$$

mikä on ristiriita. □

Hurwitzin lauseesta voimme johtaa seuraavan tuloksen, joka kuvailee analyyttisten injektioiden tasaista rajaa.

**4.5. Lause.** *Oletetaan, että injektiot  $f_j$ ,  $j \in \mathbf{N}$  ovat analyyttisiä alueessa  $D$ . Jos funktiot  $f_j$  suppenevat kohti funktiota  $f$  lokaalisti tasaisesti joukossa  $D$ , niin joko  $f$  on vakio tai se on injektiivinen  $D$ :ssä.*

Todistus HT.

## 4.2. Analyyttisen funktion avoimuus

Lauseesta 2.22 seuraa, että ei-vakio analyyttinen funktio alueessa  $D$  on diskreetti, ts. pisteen alkukuva on aina  $D$ :ssä diskreetti eli kasautumispisteetön joukko. Tässä kappaleessa analysoidaan lisää analyyttisen funktion lokaalia käyttäytymistä ja osoitetaan mm. että ei-vakio analyyttinen funktio on avoin kuvaus, ts. se kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi.

Seuraavan lauseen mukaan analyyttinen funktio käyttäytyy nollakohtansa ympäristössä kuten  $z^n$  origon ympäristössä, missä  $n$  on nollakohdan kertaluku.

**4.6. Lause.** *Olkoon  $f : B(z_0, R) \rightarrow \mathbf{C}$  analyyttinen ja  $w_0 = f(z_0)$ . Jos  $z_0$  on funktion  $f(z) - w_0$   $n$ -kertainen nollakohta, niin on olemassa  $\varepsilon > 0$  ja  $0 < \delta < R$  siten, että kun  $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ , niin yhtälöllä*

$$f(z) = w$$

*on tasan  $n$  yksinkertaista ratkaisua  $z$  kiekossa  $B(z_0, \delta)$ .*

TODISTUS: Koska  $z_0$ :n kertaluku on äärellinen, ei  $f$  ole vakio. Koska analyyttisen funktion nollakohdat ovat eristettyjä (Lause 2.24), on  $0 < \delta < \frac{1}{2}R$ , jolle yhtälöllä

$$f(z) = w_0$$

ei ole lainkaan ratkaisuja punkteeratussa kiekossa  $B^*(z_0, 2\delta)$  ja lisäksi

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{kaikilla } z \in B^*(z_0, 2\delta).$$

Olkoon

$$\gamma(t) = z_0 + \delta e^{2\pi it}, \quad t \in [0, 1]$$

ja  $\sigma = f \circ \gamma$ . Koska  $w_0 \notin |\sigma|$  on  $\varepsilon > 0$ , jolle

$$B(w_0, \varepsilon) \cap |\sigma| = \emptyset.$$

Siten  $B(w_0, \varepsilon)$  kuuluu johonkin  $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$ :n komponenttiin, joten Lemman KA1.5.4 nojalla kaikilla  $w \in B(w_0, \varepsilon)$

$$n(\sigma, w_0) = n(\sigma, w).$$

Olkoon  $w \in B^*(w_0, \varepsilon)$  ja olkoot  $a_j$  on funktion  $f(z) - w$   $k_j$ -kertaiset nollakohdat. Esimerkin 4.3 nojalla

$$n = n(\gamma, z_0) = n(\sigma, w_0) = n(\sigma, w) = \sum_{j=1}^p k_j n(\gamma, a_j).$$

Koska  $n(\gamma, a_j)$  on joko  $= 0$  tai  $= 1$  ja koska  $f'(z) \neq 0$  kaikilla  $z \in B^*(z_0, \delta)$ , on yllä olevassa summassa tasan  $n$  kappaletta yksinkertaisia yhtälön  $f(z) = w$  ratkaisuja  $a_j \in B^*(z_0, \delta)$ .  $\square$

**4.7. Huomautus.** Lausetta 4.6 kutsutaan englanniksi nimellä ”Branched Covering Principle”, mikä viittaa siihen, että analyyttinen funktio peittää kuvan lokaalisti  $n$  kertaa.

Todistusta analysoimalla näemme, että luvuksi  $\delta > 0$  kelpaa mikä tahansa sellainen, jolle

$$f(z) \neq w_0 \quad \text{ja} \quad f'(z) \neq 0 \quad \text{kun} \quad 0 < |z - z_0| \leq \delta.$$

Sen jälkeen luvulta  $\varepsilon > 0$  riittää vaatia, että

$$\varepsilon \leq |w_0 - f(z)| \quad \text{aina, kun} \quad |z - z_0| = \delta.$$

Ei-vakio analyyttinen funktio  $f$  on *avoin kuvaus* ts. avoimen joukon  $G$  kuvajoukko  $f(G)$  on aina avoin:

**4.8. Lause.** *Olkoon  $f$  ei-vakio analyyttinen funktio alueessa  $D$ . Tällöin  $f$  on avoin kuvaus.*

TODISTUS: Olkoon  $G \subset D$  avoin ja  $w_0 \in f(G)$ . Valitaan  $z_0 \in G$ , jolle  $f(z_0) = w_0$ . Koska  $f$  ei ole vakio, voidaan Lausetta 4.6 soveltaa ja löydetään  $\delta > 0$  ja  $\varepsilon > 0$ , joille  $B(z_0, \delta) \subset G$  ja jokaisella  $w \in B(w_0, \varepsilon)$  on (ainakin yksi) alkukuva  $z \in B(z_0, \delta)$ . Siis

$$B(w_0, \varepsilon) \subset f(B(z_0, \delta)) \subset f(G),$$

joten  $f(G)$  on avoin.  $\square$

**4.9. Seuraus.** Olkoon  $f : G \rightarrow \mathbf{C}$  analyyttinen ja  $z_0 \in G$ . Jos  $f'(z_0) \neq 0$ , niin on olemassa  $r > 0$  siten, että

$$f|_{B(z_0, r)} : B(z_0, r) \rightarrow f(B(z_0, r))$$

on homeomorfini.

TODISTUS: Merkitään  $w_0 = f(z_0)$ . Koska  $f'(z_0) \neq 0$ , niin Lausetta 4.6 voidaan soveltaa pisteen  $z_0$  jossain ympäristössä  $B(z_0, R) \subset G$  arvolla  $n = 1$ . Siten löydetään  $\varepsilon > 0$  ja  $\delta > 0$ , joille  $B = B(z_0, \delta) \subset G$  ja jokaisella  $w \in B(w_0, \varepsilon)$  on täsmälleen yksi alkukuva  $z \in B$  (voidaan olettaa, että myös pisteellä  $w_0$  on täsmälleen yksi alkukuva  $z_0$  kiekossa  $B$ ; ylim. HT). Funktion  $f$  jatkuvuuden nojalla on olemassa  $0 < r < \delta$  s.e.  $f(B(z_0, r)) \subset B(w_0, \varepsilon)$ . Osoitetaan, että  $f|_{B(z_0, r)} : B(z_0, r) \rightarrow f(B(z_0, r))$  on bijektio; huomaa, että tämä rajoittuma on määritelmänsä nojalla surjektio.

Injektiivisyyttä varten olkoon  $z \in B(z_0, r)$ . Oletetaan, että  $\zeta \in B(z_0, r)$  siten, että  $f(\zeta) = f(z) =: w \in B(w_0, \varepsilon)$ . Aiemman päättelyn nojalla  $z = \zeta$ , sillä muuten pisteellä  $w$  olisi (ainakin) kaksi alkukuvaa joukossa  $B(z_0, r) \subset B(z_0, \delta)$ . Siispä  $f|_{B(z_0, r)} : B(z_0, r) \rightarrow f(B(z_0, r))$  on bijektio; käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraa kuvauksen avoimuudesta (Lause 4.8).  $\square$

**4.10. Seuraus.** Olkoon  $f : G \rightarrow \mathbf{C}$  analyyttinen injektio. Tällöin

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{kaikilla } z \in G.$$

TODISTUS: Olkoon  $z_0 \in G$  ja  $f(z_0) = w_0$ . Piste  $z_0$  on tämän yhtälön yksinkertainen juuri, koska muutoin löytäisimme pisteen  $w \in f(G)$  ( $w_0$ :n läheltä), jolla olisi useampi alkukuvapisteen  $G$ :ssä (Lause 4.6), mikä olisi vastoin tietoa, että  $f$  on injektio. Siten kertaluvun määrittelyn mukaan  $f'(z_0) \neq 0$ .  $\square$

### 4.3. Johdantoa konformikuvauksiin

Monia fysikaalisia ilmiöitä, kuten nesteiden virtaus, lämmönjohtuminen yms. mallitetaan matememaattisesti Laplacen yhtälön

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad z = (x, y) \in \mathbf{C},$$

avulla. Tätä yhtälöä on huomattavasti helpompi käsitellä, mikäli tarkasteltava alue on joko puolitaso  $H$  tai kiekko  $B$  kuin yleinen alue  $G$ . Cauchy-Riemannin yhtälöiden

avulla nähdään, että 'konforminen muuttujanvaihto' säilyttää Laplace-operaattorin, ts. jos  $f : D \rightarrow G$  on konformikuvaus, kts. Määritelmä 4.11, ja  $u$  toteuttaa Laplace-yhtälön  $G$ :ssä, niin  $u \circ f$  toteuttaa Laplace-yhtälön  $D$ :ssä. Mm. tästä syystä on tärkeää löytää eri alueiden välille konformikuvauksia:

**4.11. Määritelmä.** Funktio  $f : G \rightarrow \mathbf{C}$  on *konformikuvaus* (*univalent, schlicht*) alueessa  $G$ , jos se on analyyttinen injektio alueessa  $G$ .

**4.12. Huomautus.** Monesti käytetään sanontaa:  $f$  on konforminen (pisteessä  $z_0$ ), jolloin tarkoitetaan vain, että  $f$  on lokaalisti injektio (ts. sen derivaatta ei häviä). Konformikuvaus kielenkäytössämme on siis globaali injektio. Lauseesta 4.9 seuraa, että jos  $f'(z_0) \neq 0$ , on  $z_0$ :lla ympäristö  $U$ , jossa  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  on konformikuvaus.

Klassisessa mielessä konformisuus tarkoittaa sitä, että kulmien suuruudet säilyvät infinitesimaalisessa skaalassa: Jos  $\gamma$  ja  $\sigma$  ovat säännöllisiä polkuja, jotka kulkevat pisteen  $z_0$  kautta ja jos  $f'(z_0) \neq 0$ , niin käyrien  $\gamma$  ja  $\sigma$  (tangenttien) välinen kulma = kuvakäyrien  $f \circ \gamma$  ja  $f \circ \sigma$  (tangenttien) välinen kulma. Tämä on helppo uskoa huomautuksen KA1.2.3 valossa: molemmat käyrät  $\gamma$  ja  $\sigma$  kiertyvät kuvauksessa  $f$  pisteessä kulman  $\arg(f'(z_0))$  verran ja siten niiden välinen kulma säilyy.

**Esimerkki.** Kuvaus  $f(z) = z^2$  on konforminen origon ulkopuolella, mutta ei ole lokaali injektio origossa.

Sen sijaan eksponenttifunktion derivaatta ei häviä missään, joten se määrittelee lokaalisti konformikuvauksen.

Edellä olevista lauseista saamme:

**4.13. Lause.** *Olkoon  $f : G \rightarrow \mathbf{C}$  konformikuvaus. Tällöin*

- (i)  $f$  määrittelee homeomorfismin  $f : G \rightarrow f(G)$ .
- (ii)  $f'(z) \neq 0$  kaikilla  $z \in G$ .
- (iii) Funktion  $f$  käänteiskuvaus  $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$  on myös konformikuvaus ja

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

**Esimerkki.** Seuraavien alueiden  $G = \{z \in \mathbf{C} : |z| > 1\}$  ja  $D = B^*(0, 1)$  välisen konformikuvauksen antaa  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

Seuraava Riemannin kuvauslause kertoo, että jokainen yhdesti yhtenäinen alue (joka ei ole koko kompleksitaso) on konformisesti kiekko.

**4.14. Lause** (Riemannin kuvauslause). *Olkoon  $D \neq \mathbf{C}$  yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin on olemassa analyyttinen bijektio  $f : D \rightarrow B(0, 1)$ .*

Riemannin kuvauslauseen 4.14 todistus annetaan seuraavissa kahdessa aliluvussa. Sen avulla voidaan helposti todistaa Lause 4.16, joka itse asiassa karakterisoi kiekon kanssa konformisesti ekvivalentit kompleksitason alueet; tarvitsemme vain seuraavan aputuloksen.

**4.15. Lemma.** *Olkoon  $D$  yhdesti yhtenäinen alue ja  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  konformikuvaus. Tällöin  $f(D)$  on yhdesti yhtenäinen alue.*

*Todistus.* Koska  $f$  ei ole vakio, niin  $f(D)$  on alue. Olkoon  $w_0 \in \mathbf{C} \setminus f(D)$  ja olkoon  $\sigma$  suljettu tie alueessa  $f(D)$ . Riittää osoittaa, että  $n(\sigma, w_0) = 0$ .

Nyt  $\gamma = f^{-1} \circ \sigma$  on suljettu tie alueessa  $D$ , missä  $f^{-1}$  on kuvauksen  $f : D \rightarrow f(D)$  käänteiskuvaus, joka on myös konformikuvaus. Lisäksi  $\sigma = f \circ \gamma$ . Siten

$$n(\sigma, w_0) = n(f \circ \gamma, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz.$$

Koska  $\gamma$  on suljettu tie yhdesti yhtenäisessä alueessa  $D$  ja  $z \mapsto f'(z)/(f(z) - w_0)$  on analyyttinen joukossa  $D$ , niin viimeinen integraali on nolla Cauchyn lauseen homologisen version nojalla.  $\square$

**4.16. Lause.** *Olkoon  $G$  avoin joukko. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (A)  $G \neq \mathbf{C}$  ja  $G$  on yhdesti yhtenäinen;
- (B) on olemassa analyyttinen bijektio  $f : G \rightarrow B(0, 1)$ .

*Todistus.* Implikaatio (A)  $\Rightarrow$  (B) seuraa Riemannin kuvauslauseesta. Olkoon sitten  $G$  avoin ja olkoon  $f : G \rightarrow B(0, 1)$  analyyttinen bijektio; Liouvilin lauseen nojalla  $G \neq \mathbf{C}$ . Edelleen, koska käänteiskuvaus  $f^{-1} : B(0, 1) \rightarrow G$  on analyyttinen bijektio niin Lemma 4.15 osoittaa, että  $G = f^{-1}[B(0, 1)]$  on yhdesti yhtenäinen alue.  $\square$

Riemannin kuvauslauseelle on monia todistuksia ja alla esitettävä todistus on alunperin Fejerin ja Rieszin (1922). Se pohjautuu Dirichletin ja Riemannin ideoihin, ratkaisten sopivasti asetetun ekstremaaliongelman. Tätä varten käsittelemme aluksi hieman normaaliperheiden teoriaa.

## 4.4. Normaaliperheet ja Montelin lause

Muistetaan seuraava määritelmä:

- jono  $f_j : D \rightarrow \mathbf{C}$ , missä  $D \subset \mathbf{C}$  on alue, suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa  $D \Leftrightarrow$  funktiot  $f_j$  suppenevat tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa  $K \subset D$ .

Tässä luvussa annamme erittäin hyödyllisen kriteerion (Arzela–Ascolin lause), joka takaa lokaalisti tasaisesti suppenevan osajonon olemassaolon.

**4.17. Määritelmä.** Olkoon  $D$  alue ja  $\mathcal{F} \subset C(D, \mathbf{C}) = \{f : D \rightarrow \mathbf{C} \text{ jatkuva}\}$  perhe jatkuvia kompleksiarvoisia funktioita. Sanomme, että perhe  $\mathcal{F}$  on *normaali joukossa*  $D$ , jos jokainen jono perheen  $\mathcal{F}$  funktioita sisältää osajonon joka suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa  $D$ .

Huomaa, että (osajonon) rajafunktion ei suinkaan tarvitse kuulua perheeseen  $\mathcal{F}$ . Rajafunktio on tosin aina jatkuva  $D$ :ssä. Ohitamme seuraavan lauseen todistuksen, joka tyypillisesti esitetään topologian tai funktionaalianalyysin peruskursseilla.

**4.18. Lause** (Arzela–Ascoli). *Olkoon  $D \subset \mathbf{C}$  alue. Tällöin perhe  $\mathcal{F}$  on normaali joukossa  $D$ , jos ja vain jos ehdot (1) ja (2) ovat voimassa:*

- (1)  $\mathcal{F}$  on yhtäjatkuva joka pisteessä, so. jokaisella  $w \in D$  ja  $\varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta > 0$  siten, että

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \quad \text{aina kun } z \in B(w, \delta) \text{ ja } f \in \mathcal{F}$$

- (2) jokaisella  $w \in D$  joukko  $A(w) = \overline{\{f(w) : f \in \mathcal{F}\}}$  on kompakti.

**4.19. Huomautus.** Olkoon  $\mathcal{F} \subset C(D, \mathbf{C})$  normaaliperhe analyttisiä funktioita alueessa  $D$ . Perheen  $\mathcal{F}$  jokainen jono sisältää osajonon, joka suppenee tasaisesti  $D$ :n kompakteissa osajoukoissa. Erityisesti kyseisen osajonon rajafunktio on analyttinen Lauseen 2.9 nojalla.

Sovellamme Arzela–Ascolin lausetta vastataksemme seuraavaan kysymykseen: milloin perhe  $\mathcal{F}$  analyttisiä funktioita avoimessa joukossa  $D \subset \mathbf{C}$  on normaali?

**4.20. Lause** (Montelin lause). *Oletetaan, että  $D$  on alue. Perhe  $\mathcal{F}$  analyttisiä funktioita joukossa  $D$  on normaali, jos ja vain jos  $\mathcal{F}$  on lokaalisti rajoitettu eli jokaiselle kompaktille joukolle  $K \subset D$  on olemassa  $M = M(K) < \infty$  siten, että*

$$|f(z)| \leq M \quad \text{aina kun } z \in K \text{ ja } f \in \mathcal{F}.$$



TODISTUS: Olkoon  $\mathcal{F}$  lokaalisti rajoitettu perhe analyttisiä funktioita alueessa  $D$ . Osoitetaan aluksi, että  $\mathcal{F}$  on yhtäjatkuva. Olkoon tätä varten  $w \in D$  ja  $\varepsilon > 0$ . Luvun  $\delta > 0$  konstruoinemiseksi valitaan  $r > 0$  siten, että  $K = \overline{B(w, r)} \subset D$ . Tarkastellaan funktiota  $f \in \mathcal{F}$ , jolle oletuksen nojalla pätee

$$\sup_{|z-w| \leq r} |f(z)| \leq M = M(K) < \infty.$$

Cauchyn integraalikaavan (Lause 1.10) nojalla

$$\begin{aligned} \sup_{|z-w| \leq r/2} |f'(z)| &= \sup_{|z-w| \leq r/2} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(w, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{M 2\pi r}{2\pi (r/2)^2} = \frac{4M}{r} =: M'. \end{aligned}$$

Valitaan  $\delta = \min\{\varepsilon/(2M'), r/2\} > 0$ , jolloin

$$\begin{aligned} \sup_{|z-w| \leq \delta} |f(z) - f(w)| &= \sup_{|z-w| \leq \delta} \left| \int_{[w, z]} f'(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \sup_{|z-w| \leq \delta} |z - w| M' \leq \delta M' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska luku  $\delta$  ei riipu funktiosta  $f$ , niin perhe  $\mathcal{F}$  on yhtäjatkuva.

Edelleen, koska  $\{w\} \subset D$  on kompakti, niin oletuksen nojalla  $|f(w)| \leq M(\{w\})$  aina kun  $w \in D$  ja  $f \in \mathcal{F}$ . Erityisesti

$$A(w) = \overline{\{f(w) : f \in \mathcal{F}\}}$$

on kompakti jokaisella  $w \in D$ , sillä kyseinen joukko on aina rajoitettu.

Perheen  $\mathcal{F}$  normaalius seuraa nyt Arzela–Ascolin Lauseesta 4.18. Montelin ehdon välttämättömyys jätetään harjoitustehtäväksi.  $\square$

## 4.5. Riemannin kuvauslauseen todistus

Todistamme Riemannin kuvauslauseen 4.14: jos  $D \neq \mathbf{C}$  on yhdesti yhtenäinen alue, niin on olemassa analyttinen bijektio  $f : D \rightarrow B(0, 1)$ . Ryhdytään todistukseen. Kiinnitetään  $z_0 \in D$  ja merkitään

$$\mathcal{F} = \{f : D \rightarrow \mathbf{C} \text{ konformikuvaus} : f(D) \subset B(0, 1) \text{ ja } f(z_0) = 0\}.$$

Todistus etenee kolmessa vaiheessa, jotka karkeasti kuvaten ovat seuraavat:

1.  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ;
2. On olemassa  $f \in \mathcal{F}$  siten, että  $|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$  kaikilla  $g \in \mathcal{F}$ ;
3. Jos  $f \in \mathcal{F}$  on kuten kohdassa 2., niin funktiolla  $f$  on halutut ominaisuudet.

**Askel 1.** Ensimmäisen kohdan  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  todistus pohjautuu oletukseen  $D \neq \mathbf{C}$  ja yhdesti yhtenäisyyteen; yksityiskohdat HT.

**Askel 2.** Merkitään  $s = \sup\{|g'(z_0)| : g \in \mathcal{F}\}$ . Valitaan jono  $f_j, j \in \mathbf{N}$ , funktioita perheestä  $\mathcal{F}$  siten, että

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |f'_j(z_0)| = s.$$

Koska  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ , ja kyseisen perheen jäsenet ovat konformikuvauksina analyyttisiä injektioita joukossa  $D$ , niin Seurauksen 4.10 nojalla  $s > 0$ .

Määritelmän nojalla perhe  $\mathcal{F}$  on lokaalisti rajoitettu (koska jokaiselle kompaktille joukolla  $K \subset D$  on  $|g(z)| \leq 1$  kaikilla  $z \in K$  ja  $g \in \mathcal{F}$ ). Montelin lauseen 4.20 nojalla perhe  $\mathcal{F}$  on normaali joukossa  $D$ . Erityisesti on olemassa jonon  $(f_j)$  osajono  $(f_{j_k})_{k \in \mathbf{N}}$  ja funktio  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  siten, että

$$f_{j_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \text{ lokaalisti tasaisesti alueessa } D.$$

Lauseen 2.9 nojalla rajafunktio  $f$  on analyyttinen alueessa  $D$ . Saman lauseen nojalla  $f'_{j_k} \rightarrow f'$  lokaalisti tasaisesti, kun  $k \rightarrow \infty$ . Erityisesti

$$0 < s = \lim_{k \rightarrow \infty} |f'_{j_k}(z_0)| = |f'(z)|,$$

joten  $f$  ei ole vakio alueessa  $D$ . Koska funktiot  $f_{j_k}$  ovat analyyttisiä injektioita  $D$ :ssä, niin Lauseen 4.5 nojalla  $f$  on injektio  $D \rightarrow \mathbf{C}$ . Huomataan seuraavaksi, että  $f(D) \subset \overline{B(0,1)}$  ja  $f$  on avoin kuvaus Lauseen 4.8 nojalla. Siten  $f(D) \subset B(0,1)$ . Koska  $f_{j_k}(z_0) = 0$  kaikilla  $k \in \mathbf{N}$ , niin myös  $f(z_0) = 0$ .

Yllä olevasta päättelystä seuraa, että  $f \in \mathcal{F}$  ja  $f$  toteuttaa ehdon  $|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$  kaikilla funktioilla  $g \in \mathcal{F}$ .

**Askel 3.** Väitämme, että  $f$  on analyyttinen bijektio  $D \rightarrow B(0,1)$ . Askelen 2. jälkeen riittää osoittaa, että

$$f : D \rightarrow B(0,1) \text{ on surjektio.}$$

Tämä todistetaan vastaoletuksen kautta: On olemassa  $w_0 \neq 0$  siten, että

$$w_0 \in B(0,1) \setminus f(D).$$

Ryhdyimme seuraavana tehtävänä osoittamaan, että tämä johtaa ristiriitaan ehdon  $|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$  kaikilla  $g \in \mathcal{F}$  kanssa.

Tarvitsemme apukuvauksia (yksityiskohdat HT): Jos  $a \in B(0, 1)$  niin merkitään

$$\phi_{-a}(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{kun } z \in B(0, 1).$$

Kuvaus  $\phi_{-a}$  on analyyttinen bijektio  $B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  ja

$$(4.1) \quad \phi'_{-a}(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2} \quad \text{aina kun } z \in B(0, 1).$$

Yhdistetty kuvaus  $\tau = \phi_{-w_0} \circ f$  on hyvin määritelty konformikuvaus  $D \rightarrow B(0, 1)$ . Lemman 4.15 nojalla  $\tau[D] \subset B(0, 1)$  on yhdesti yhtenäinen ja  $0 \notin \tau[D]$ . Lauseen 1.15 nojalla alueessa  $\tau[D]$  on logaritmin haara  $\log : \tau[D] \rightarrow \mathbf{C}$ , joka on analyyttinen injektio s.e.  $e^{\log(z)} = z$  kaikilla  $z \in \tau[D]$ . Määritellään

$$g(z) = e^{\frac{1}{2} \log(\tau(z))}, \quad \text{kun } z \in D.$$

Osoitetaan, että  $g$  on konformikuvaus  $D \rightarrow B(0, 1)$ ; kaikilla  $z \in D$  nimittäin on

$$|g(z)|^2 = |g(z)^2| = |e^{\log(\tau(z))}| = |\tau(z)| < 1.$$

Lisäksi jos  $z, z' \in D$  ovat eri pisteitä, niin

$$g(z)^2 = e^{\log(\tau(z))} = \tau(z) \neq \tau(z') = e^{\log(\tau(z'))} = g(z')^2.$$

Tämä osoittaa kuvauksen  $g$  injektiiivisyyden. Seuraavaksi funktio  $g$  'normalisoidaan' määrittelemällä

$$\rho = \phi_{-g(z_0)} \circ g,$$

jolloin  $\rho$  on konformikuvaus  $D \rightarrow B(0, 1)$  ja  $\rho(z_0) = 0$ . Erityisesti  $\rho \in \mathcal{F}$ . Ristiriidan osoittamiseksi riittää siis todistaa, että

$$(4.2) \quad |\rho'(z_0)| > |f'(z_0)|.$$

Osoitetaan vielä epäyhtälö (4.2); soveltamalla derivoimiskaavaa (4.1) ja annettuja määritelmiä saamme yhtäsuuruudet:

$$\begin{aligned}
 |\rho'(z_0)|^2 &= |\phi'_{-g(z_0)}(g(z_0))|^2 |g'(z_0)|^2 \\
 &= \frac{1}{(1 - |g(z_0)|^2)^2} \cdot \left| \frac{e^{\frac{1}{2} \log(\tau(z_0))} \tau'(z_0)}{2\tau(z_0)} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{(1 - |g(z_0)|^2)^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{|\tau(z_0)|} \cdot |\tau'(z_0)|^2 \\
 &= \frac{1}{(1 - |w_0|^2)^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{|w_0|} \cdot (1 - |w_0|^2)^2 \cdot |f'(z_0)|^2 \\
 &= \left( \frac{1 + |w_0|}{2\sqrt{|w_0|}} \right)^2 |f'(z_0)|^2.
 \end{aligned}$$

Lopuksi, koska

$$\frac{1 + x^2}{2x} = 1 + \frac{(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2}{2} > 1 \quad \text{aina kun } x \in (0, 1),$$

niin arvio (4.2) seuraa yllä olevista laskuista.

Tämä päättää Riemannin kuvauslauseen todistuksen. □

## 5. Laajennettu kompleksitaso ja Möbius-kuvaukset

### 5.1. Laajennettu kompleksitaso

Usein on kätevää lisätä kompleksitasoon  $\mathbf{C}$  äärettömyyspiste  $\infty \notin \mathbf{C}$ . Näin saatua joukkoa

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

sanotaan *laajennetuksi kompleksitasoksi*. Algebralliset laskutoimitukset  $\hat{\mathbf{C}}$ :ssa määritellään laajennetun reaalilukujoukon tapaan:

$$\begin{cases} \infty \pm z = z \pm \infty = \infty, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, & \text{kun } z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\} \\ \frac{z}{\infty} = 0, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ \frac{z}{0} = \infty, & \text{kun } z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Huomaa, ettei operaatioita

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0} \quad \text{eikä} \quad 0 \cdot \infty$$

ole lainkaan määritelty (eikä niitä siis saa käyttää).

Perinteisesti laajennettua kompleksitasoa ajatellaan geometrisesti kolmiulotteisena pallona, *Riemannin pallona* seuraavasti: Olkoon

$$S = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

$\mathbf{R}^3$ :n yksikköpallon pinta ja samastetaan kompleksitaso  $\mathbf{C}$  tason  $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{R}\}$  kanssa. Tarkastellaan pallon  $S$  'pohjoisnavan'  $N = (0, 0, 1)$  kautta kulkevia suoria  $L$ . Jos  $L$  ei ole  $S$ :n tangenttitasossa, niin se leikkaa pallonkuoren  $S$  täsmälleen yhdessä pisteessä  $P = (u, v, w) \neq N$  ja tason  $\mathbf{C} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{R}\}$  täsmälleen yhdessä pisteessä

$$\pi(P) = \pi(u, v, w) = \left( \frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}, 0 \right).$$

Näin saadaan bijektio  $\pi : S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{C}$ , ns. *stereograafinen projektio*. Tämä antaa vastaavuuden laajennetun kompleksitason  $\hat{\mathbf{C}}$  ja pallon  $S$  välille, kun asetetaan  $\pi(N) = \infty$ . Käänteiskuvaus  $\pi^{-1}$  on helppo määrittää:

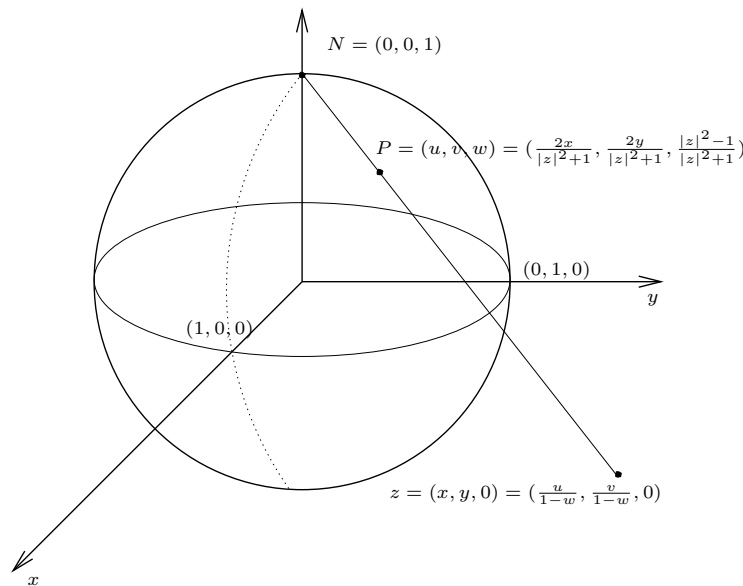
$$\pi^{-1}(z, 0) = \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Harjoitustehtävänä on melko helppoa todeta, että stereograafisessa projektiossa pohjoisnavan kautta kulkevat ympyränkaaret vastaavat kompleksitason suoria ja kompleksitason ympyrät vastaavat pallonkuoren ympyröitä. Tästä syystä  $\mathbf{C}$ :n ympyröitä ja suoria (lisättynä ääretömyyspisteellä  $\infty$ ) sanotaan laajennetun kompleksitason  $\hat{\mathbf{C}}$  *yleistetyiksi ympyröiksi*.

Puolitasot ja kiekot  $\mathbf{C}$ :ssä vastaavat ympyrän kalotteja Riemannin pallolla. Lisäksi stereograafinen projektio on 'konforminen' ts. se säilyttää kulmien suuruudet.

Huomaa, että ääretömyyspiste  $\infty$  on Riemannin pallolla  $S = \hat{\mathbf{C}}$  aivan samassa asemassa kuin muutkin pisteet, joten pyöräyttämällä ääretömyyspisteen toiseen paikkaan saa oivan kuvan laajennetun kompleksitason lokaaleista ominaisuuksista. Topologiasta meille riittänee tietää, että  $\infty$  keskinen kiekko määritellään

$$B(\infty, r) = \infty \cup \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| > \frac{1}{r} \right\}.$$



Riemannin pallo ja stereograafinen projektio.

## 5.2. Möbius-kuvauksista

### 5.1. Määritelmä. Kuvausta $f : \hat{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{missä } a, b, c, d \in \mathbf{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

sanotaan *Möbius-kuvaukseksi*.<sup>3</sup> Tässä käytetään sopimuksia:

$$\begin{aligned} \text{Jos } c = 0, \quad \text{niin } & \begin{cases} f(z) = \frac{az + b}{d}, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ f(\infty) = \infty. \end{cases} \\ \text{Jos } c \neq 0, \quad \text{niin } & \begin{cases} f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ f(-\frac{d}{c}) = \infty \\ f(\infty) = \frac{a}{c}. \end{cases} \end{aligned}$$

Helposti nähdään:

**5.2. Lause.** *Möbius-kuvaus  $f : \hat{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$  on homeomorfismi ja konformikuvaus  $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ :ssä (siis koko  $\mathbf{C}$ :ssä, jos  $c = 0$ ).*

□

**5.3. Lause.** *Möbius-kuvaukset*

$$\mathcal{G} = \{f : \hat{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}} : f \text{ on Möbius-kuvaus}\}$$

*muodostavat ryhmän, jonka laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen.*

TODISTUS: Suora lasku (HT). Möbius-kuvauksen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

käänteiskuvaus on

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

□

Huomaa, että Möbius-kuvausten ryhmä ei ole kommutatiivinen, ts on olemassa Möbius-kuvaukset  $f, g$ , joille  $f \circ g \neq g \circ f$  (HT).

<sup>3</sup>A.F. Möbius, 1790–1868. Usein Möbius-kuvauksista käytetään nimitystä lineaarinen rationaalikuvaus, linear fractional transformation.

#### 5.4. Huomautus. Möbius-kuvaukset

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ja kompleksiset  $(2 \times 2)$ -matriisit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc \neq 0,$$

vastaavat toisiaan niin, että kaikki matriisit

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A) = \lambda^2(ad - bc) \neq 0,$$

vastaavat samaa Möbius-kuvausta

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$1 - 1$  vastaavuus saadaan esimerkiksi normittamalla  $(2 \times 2)$ -matriisit niin, että vaaditaan, että niiden determinantti on  $= 1$ . Huomaa, että matriisien kertolasku vastaa Möbius-kuvausten yhdistämistä (HT).

#### 5.5. Huomautus (Yksinkertaiset Möbius-kuvaukset). Möbius-kuvausta

$$f(z) = z + w, \quad w \in \mathbf{C}$$

sanotaan *siirroksi* eli *translaatioksi*. Se siirtää kompleksitason  $\mathbf{C}$  pisteitä luvun  $w$  verran ja pitää äärettömyyspisteen paikallaan  $f(\infty) = \infty$ .

Toinen merkittävä tyyppi yksinkertaisia Möbius-kuvauksia on kuvaukset

$$g(z) = \lambda z, \quad \text{missä } \lambda \in \mathbf{C}, \lambda \neq 0.$$

Jos  $|\lambda| = 1$ , kyseessä on kompleksitason *kierto*: ts.  $g$  kiertää kompleksitason pisteitä kulman  $\arg(\lambda)$  verran ja pitää äärettömyyspisteen paikallaan  $g(\infty) = \infty$ .

Jos  $\lambda \in \mathbf{R}$  ja  $\lambda > 0$ , niin kuvaus  $g$  on *dilaatio*: *venytys* jos  $\lambda \geq 1$  ja *kutistus*, jos  $0 < \lambda \leq 1$ .

Yleinen tapaus  $\lambda \in \mathbf{C}, \lambda \neq 0$ , saadaan yhdistämällä kierto ja dilaatio, sillä

$$\lambda = |\lambda| \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$



Äärettömyyspiste pysyy paikallaan,  $g(\infty) = \infty$ .

Kolmas tyyppi alkeellisia Möbius-kuvauksia on *inversio*:

$$h(z) = \frac{1}{z}.$$

Inversio vaihtaa äärettömyyspisteen ja origon:  $h(\infty) = 0$  ja  $h(0) = \infty$ . Inversio saadaan heijastamalla piste  $z$  yksikkökiekon kehän  $\partial B(0, 1)$  suhteen ja sitten reaaliakselin suhteen (konjugaatin otto), tai päinvastoin:

$$h(z) = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2},$$

mistä nähdään, että

$$|h(z)| = \frac{1}{|z|} \quad \text{ja} \quad \arg(h(z)) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z).$$

Kaikki Möbius-kuvaukset saadaan yhdistämällä translaatio, dilaatio ja kierto sekä inversio.

**5.6. Lause.** Jokainen Möbius-kuvaus saadaan yhdistämällä translaatio  $z \mapsto z + w$ , kuvaus  $z \mapsto \lambda z$  ja inversio  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .

TODISTUS: Kun  $ad - bc \neq 0$ , niin

$$\frac{az + b}{cz + d} = \begin{cases} \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c}, & \text{jos } c \neq 0, \\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, & \text{jos } c = 0, \end{cases}$$

mitkä ovat vaadittua tyyppiä. □

**5.7. Lause.** Möbius-kuvaukset kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.

TODISTUS: Kompleksitason suorat ovat muotoa

$$(5.1) \quad Bz + \bar{B}\bar{z} + c = 0, \quad \text{missä } B \in \mathbf{C}, \quad c \in \mathbf{R},$$

minkä näkee sijoittamalla  $\mathbf{R}^2$ :n suoran  $ax + by + c = 0$  yhtälöön  $z = x + iy$ , jolloin  $2B = a - ib$ . Edelleen ympyrän

$$|z - z_0| = r$$

yhtälö saadaan muotoon

$$(5.2) \quad z\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + c = 0, \quad \text{missä } B = -z_0 \in \mathbf{C}, \quad c = |B|^2 - r^2 \in \mathbf{R}.$$

Selvästi suorat säilyvät suorina ja ympyrät ympyröinä kuvauksissa  $z \mapsto z + w$  ja  $z \mapsto \lambda z$ . Jos  $z$  on suoralla (5.1), niin sen kuvapiste  $w = 1/z$  inversiossa  $z \mapsto 1/z$  toteuttaa yhtälön

$$cw\bar{w} + B\bar{w} + \bar{B}w = 0,$$

mikä arvolla  $c = 0$  on origon kautta kulkeva suora. Jos  $c \neq 0$ , kyseessä on kaavan (5.2) nojalla ympyrä, jonka säde on  $|B|/|c|$  ja keskipiste  $-B/c$ .

Edelleen ympyrällä (5.2) olevan pisteen  $z$  kuvapiste  $w = 1/z$  inversiossa toteuttaa yhtälön

$$cw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + 1 = 0,$$

mikä arvolla  $c = 0$  (jolloin ympyränkehä kulkee origon kautta) antaa suoran yhtälön. Muilla  $c$ :n arvoilla tämä on ympyrän yhtälö.  $\square$

Koska Möbius-kuvaukset ovat homeomorfismeja, saamme tästä:

**5.8. Seuraus.** *Möbius-kuvaus kuvaa jokaisen avoimen joukon, joka on joko*

- kiekko  $B(z_0, r)$ ,
- kiekon ulkopuoli  $\hat{\mathbf{C}} \setminus \bar{B}(z_0, r)$ , tai
- jonkin suoran määräämä puolitaso  $\mathbf{C}$ :ssä,

*joukolle, joka on jotain yllämainittua tyyppiä.*

$\square$

Pistettä  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ , jolle  $f(z_0) = z_0$  sanotaan kuvauksen  $f$  kiintopisteeksi.

**5.9. Lause.** Möbius-kuvauksella  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  on joko 1 tai 2 kiintopistettä, ellei  $f$  ole identtinen kuvaus  $f(z) = z$  kaikilla  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ .

TODISTUS: HT: totea toisen asteen yhtälön

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

ratkaisujen lukumäärä (muista varoa tapausta  $z = \infty$ ). Toinen tapa on käyttää lausetta 5.10. alla.  $\square$

Möbius-kuvauksen määrittelyssä voidaan määrätä kolmen pisteen kuvapisteeet, muttei enempää.

**5.10. Lause.** Olkoot  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  kolme eri pistettä. Jos  $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  ovat kolme eri pistettä, niin on olemassa täsmälleen yksi Möbius-kuvaus  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , jolle

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2 \quad \text{ja} \quad f(z_3) = w_3.$$

TODISTUS: Voidaan olettaa (miksi?), että

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 0 \quad \text{ja} \quad w_3 = \infty.$$

*Olemassaolo:* Etsitty kuvaus on (HT: totea!)

$$f(z) = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}$$

Huomaa: jos  $z_1, z_2$  tai  $z_3$  on  $\infty$ , niin (vastavasti)

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3}, \quad \frac{z_1 - z_3}{z - z_3} \quad \text{tai} \quad \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}.$$

*Yksikäsitteisyys:* Olkoon  $g$  toinen tällainen Möbius-kuvaus. Silloin

$$f \circ g^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

on Möbius-kuvaus, jolle

$$\begin{cases} f \circ g^{-1}(0) = 0, & \text{josta } b = 0 \\ f \circ g^{-1}(\infty) = \infty, & \text{josta } c = 0, \\ f \circ g^{-1}(1) = 1, & \text{josta } \frac{a}{d} = 1. \end{cases}$$

Näin ollen

$$f \circ g^{-1}(z) = z \quad \text{kaikilla } z \in \hat{\mathbb{C}},$$

joten  $f = g$  ja väite on todistettu. □

Kuvauksen  $f$  määrittelyn kaavaa sanotaan kaksoisuhteeksi:

**5.11. Määritelmä.** Olkoot  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$  neljä eri pistettä. Lukua

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

sanotaan pisteiden  $z_1, z_2, z_3, z_4$  *kaksoisuhteeksi*.<sup>4</sup>

Kaksoissuhde on invariantti Möbius-kuvauksissa.

**5.12. Lause.** *Olkoot  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$  neljä eri pistettä ja  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  Möbius-kuvaus. Tällöin*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)].$$

**TODISTUS:** Olkoon

$$g(z) = [z_1, z_2, z_3, z]$$

se yksikäsitteinen Möbius-kuvaus (Lause 5.10), joka kuvaa pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  (vastaavasti) pisteiksi 1, 0 ja  $\infty$ . Tällöin  $g \circ f^{-1}$  kuvaa pisteet  $f(z_1), f(z_2)$  ja  $f(z_3)$  (vastaavasti) pisteiksi 1, 0 ja  $\infty$ , joten

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = g(z_4) = g \circ f^{-1}(f(z_4)) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)],$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Lauseen 5.10 yksikäsitteisyyspuolesta. □

---

<sup>4</sup>Varoitus: älä sekoita merkintää murtoviivaan. Kaksoissuhde voidaan kirjoittaa monessa eri järjestyksessä, joten tarkista aina käyttämästäsi lähteestä, mikä on kulloinenkin määritelmä.

**5.13. Huomautus.** Lauseen 5.12 avulla löydetään nopeasti se (yksikäsitteinen) Möbius-kuvaus  $f$ , joka kuvaa annetut kolme eri pistettä  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbf{C}}$  annetuille kolmelle eri pisteelle  $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ : ratkaistaan  $f(z)$  kaksoissuhteesta

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z].$$

**Esimerkki.** Muodostetaan Möbius-kuvaus  $f$ , jolle  $0 \mapsto 0$ ,  $1 \mapsto 1$  ja  $2 \mapsto i$ . Lasketaan

$$[1, 0, i, f(z)] = [1, 0, 2, z] \quad \text{eli} \quad \frac{(1-i)(-f(z))}{(i-f(z))} = \frac{(1-2)(-z)}{2-z},$$

josta

$$f(z) = \frac{iz}{z(2-i) - 2 + 2i}.$$

Huomaa, että Lauseiden 5.7 ja 5.8 valossa  $f$  kuvaa reaaliakselin ympyrälle, jonka määrää pisteet 0, 1 ja  $i$ . Edelleen koska  $f(-i) = -1/3$  kuvaa  $f$  ylemmän puolitason (bijektiivisesti) em. ympyrän rajaamalle kiekolle

$$B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

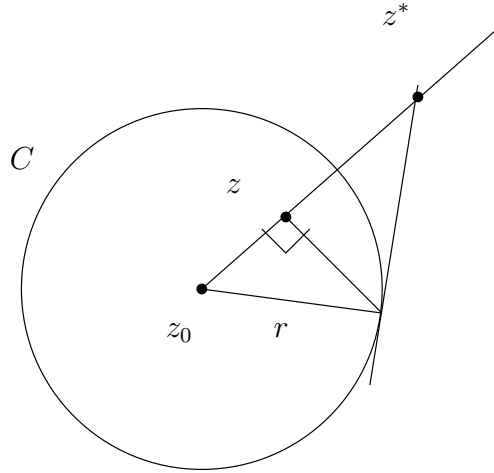
Olkoon

$$C = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = r\}$$

$z_0$ -keskinen  $r$ -säteinen ympyrä. Jos  $z \in \hat{\mathbf{C}}$ , niin sen *heijastuspiste kehän  $C$  suhteen* on

$$z^* = \begin{cases} z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}, & \text{jos } z \neq z_0, \infty \\ \infty, & \text{jos } z = z_0 \\ z_0, & \text{jos } z = \infty. \end{cases}$$

Joskus sanotaan, että pisteet  $z$  ja  $z^*$  ovat *symmetrisiä* ympyrän  $C$  suhteen.



**5.14. Lause.** *Pisteet  $z$  ja  $w$  ovat symmetrisiä ympyrän  $C$  suhteen, jos ja vain, jos*

$$[w, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} \quad \text{kaikilla } z_1, z_2, z_3 \in C.$$

TODISTUS: Ensiksi havaitaan, että

$$z_j^* = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z}_j - \bar{z}_0} = z_0 + \frac{(z_j - z_0)(\bar{z}_j - \bar{z}_0)}{\bar{z}_j - \bar{z}_0} = z_j, \quad \text{kun } z_j \in C,$$

josta

$$z^* - z_j = \frac{r^2(\bar{z}_j - \bar{z})}{(\bar{z}_j - \bar{z}_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)},$$

ja siten

$$[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}.$$

Toinen suunta HT. Huomaa, että mitkä tahansa kolme eri pistettä  $z_1, z_2, z_3 \in C$  identifioivat heijastuspisteen.  $\square$

**5.15. Seuraus.** *Olkoon  $f$  Möbius-kuvaus ja  $C$  yleistetty ympyrä. Tällöin  $C$ :n suhteen symmetristen pisteiden  $z$  ja  $z^*$  kuvapisteen  $f(z)$  ja  $f(z^*)$  ovat symmetrisiä yleistetyn ympyrän  $f(C)$  suhteen.*

$\square$

**Esimerkki.** Muodostetaan Möbius-kuvaus  $f$ , joka kuvaa yksikkökierokkeen  $B(0, 1)$  itselleen,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = i$ . Huomataan, että koska origo pysyy paikallaan, niin sen suhteen symmetrinen piste  $\infty$  pysyy myös paikallaan. Siten

$$[i, 0, \infty, f(z)] = [1, 0, \infty, z],$$

josta

$$\frac{f(z)}{i} = \frac{z}{1} \quad \text{eli} \quad f(z) = iz.$$

### 5.3. Möbius-kuvaukset konformikuvauksina

Osoitetaan, että kiekon konformikuvaukset itselleen ovat Möbius-kuvauksen rajoittumia po. kiekkoon.

Aloitetaan seuraavalla tuloksella.

**5.16. Lause.** *Olkoon  $z_0 \in B(0, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ . Tällöin Möbius-kuvaus*

$$f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

*määrittää (konformisen) bijektion  $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ , jolle  $f(z_0) = 0$ .*

TODISTUS: Huomaa, että  $f$  on Möbius-kuvaus, sillä

$$\lambda(1 - z_0\bar{z}_0) = \lambda(1 - |z_0|^2) \neq 0.$$

Siten, koska  $f(z_0) = 0$ , niin riittää tarkistaa, että

$$f(\partial B(0, 1)) \subset \partial B(0, 1).$$

Näin onkin, sillä kun  $|z| = 1$ , niin

$$|f(z)| = |\lambda| \frac{|z - z_0|}{|1 - z\bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z| \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} - \bar{z}_0 \right|} = \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1.$$

□

Tarvitsemme vielä Schwarzin lemmaa:

**5.17. Lause.** Jos  $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  on analyyttinen ja  $f(0) = 0$ , niin

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{ja} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0, 1).$$

Lisäksi, jos on  $z_0 \in B(0, 1)$ ,  $z_0 \neq 0$ , jolle  $|f(z_0)| = |z_0|$ , niin on olemassa  $\lambda \in \mathbf{C}$ , jolle  $|\lambda| = 1$  ja

$$f(z) = \lambda z \quad \text{kaikilla } z \in B(0, 1).$$

TODISTUS: Todistettu demoissa: seuraa hetimiten, kun maksimiperiaatetta KA1.5.16 sovelletaan funktioon

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \\ f'(0), & \text{kun } z = 0, \end{cases}$$

joka on analyyttinen koko kiekossa  $B(0, 1)$ .

□

Kiekon konformiset kuvaukset itselleen ovat Möbius-kuvauksia.

**5.18. Lause.** Olkoon  $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  konforminen bijektio ja  $z_0 = f^{-1}(0)$ . Tällöin on olemassa  $\lambda \in \mathbf{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ , jolle

$$f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \quad \text{kaikilla } z \in B(0, 1).$$

TODISTUS: Olkoon

$$g(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

jolloin Lauseen 5.16 nojalla  $g$  määrää kiekon konformikuvauksen itselleen, jolle  $g(z_0) = 0$ . Siten  $h = f \circ g^{-1}$  toteuttaa Schwarzin lemman 5.17 oletukset, joten

$$|h(z)| \leq |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0, 1).$$

Kuvaus  $h^{-1}$  toteuttaa samoin Schwarzin lemman 5.17 oletukset, joten

$$|h^{-1}(w)| \leq |w| \quad \text{kaikilla } w \in B(0, 1).$$



Erityisesti, kun  $z = h^{-1}(w)$  on  $h(z) = w$  ja

$$|h(z)| \leq |z| = |h^{-1}(w)| \leq |h(z)|$$

eli

$$|h(z)| = |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0, 1).$$

Siten Schwarzin lemmän erikoistapaus kertoo, että

$$h(z) = \lambda z,$$

mistä

$$f(z) = h(g(z)) = \lambda g(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

kuten väitettiin.

□

**5.19. Seuraus.** Jos  $B$  on kiekko, niin jokainen konformikuvaus  $f : B \rightarrow B$  on Möbius-kuvauksen rajoittuma kiekkoon  $B$ .

□

Koko tason konformikuvaukset ovat affineja kuvauksia:

**5.20. Lause.** Olkoon  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  kokonainen injektio. Tällöin on olemassa  $a, b \in \mathbf{C}$   $a \neq 0$ , joille

$$f(z) = az + b \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}.$$

Erityisesti siis  $f$  on Möbius-kuvaus ja konforminen bijektio.

TODISTUS: Osoitetaan ensin, että  $f$  on polynomi. Jos  $f$  ei ole polynomi, on äärettömyyspiste sen oleellinen erikoispiste (Lause 3.11), ts. origo on kuvauksen

$$z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$$

oleellinen erikoispiste. Tällöin Casorati-Weierstrassin lauseesta 3.10 seuraa, että joukko

$$f(\mathbf{C} \setminus B(0, 1))$$

on  $\mathbf{C}$ :ssä tiheä, joten avoin joukko (ks. Lause 4.8)  $f(B(0,1))$  leikkaa sitä,

$$f(\mathbf{C} \setminus B(0,1)) \cap f(B(0,1)) \neq \emptyset.$$

Siis on pisteet  $z_1 \in B(0,1)$  ja  $z_2 \notin B(0,1)$ , joille vastoin  $f$ :n injektiiivisyyttä pätee

$$f(z_1) = f(z_2).$$

Siis  $f$  on polynomi.

Algebran peruslauseen (Lause KA1.5.15) ja Lauseen 4.6 nojalla injektiiivinen polynomi on 1. astetta, mistä väite seuraa.  $\square$