Complex analysis 1

Exercises 7, 1.3.2024

(suomeksi toisella sivulla)

1. Let γ and β be closed, piecewise C^1 paths in $\mathbb{C}$ with the same initial point. Show that the winding number satisfies

$$
\begin{aligned}
n_{\overleftarrow{\gamma}}(z) &= -n_\gamma(z), && z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \\
n_{\gamma \star \beta}(z) &= n_\gamma(z) + n_\beta(z), && z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma^* \cup \beta^*).
\end{aligned}
$$

2. Let η be the circle path $\eta(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Compute the path integral

$$\int_\eta \sqrt{9 - z^2}\, dz,$$

where $\sqrt{\cdot}$ is the principal square root. (*Hint:* Cauchy's theorem.)

3. With η as above, compute

$$\int_\eta \frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}\, dz.$$

4. Compute

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}.$$

(*Hint:* It may be helpful to relate this to the path integral

$$\int_\eta \frac{1}{5 - 2(z + 1/z)} \frac{dz}{iz}.)$$

5. Let $\gamma_r(t) := re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Show that

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = i\pi \quad \text{and} \quad \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

(*Hint:* In the second part, notice that $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}$. What can you say about $\operatorname{Im} z$ for $z = \gamma_R(t)$, and $t \in [0, \pi]$?)

6. Show that

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi.$$

(*Hint:* Let $0 < r < R < \infty$. Try using the integral of e^{it}/t over $[-R, -r] \cup [r, R]$, which can be evaluated by integrating $z \mapsto e^{iz}/z$ along the closed path $[-R, -r] \star \overleftarrow{\gamma_r} \star [r, R] \star \gamma_R$, where γ_r, γ_R are given in Exercise 5.)

Kompleksianalyysi 1

Demo 7, 1.3.2024

(English on the other page)

1. Olkoot γ ja β suljettuja, paloittain C^1-polkuja $\mathbb{C}$:ssä, joilla on sama alkupiste. Näytä, että kierrosluvulle pätee

$$n_{\overleftarrow{\gamma}}(z) = -n_\gamma(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$
$$n_{\gamma\star\beta}(z) = n_\gamma(z) + n_\beta(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma^* \cup \beta^*).$$

2. Olkoon η ympyräpolku $\eta(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Laske polkuintegraali

$$\int_\eta \sqrt{9 - z^2}\, dz,$$

missä $\sqrt{\cdot}$ on pääneliöjuuri. (*Vihje:* Cauchyn lause.)

3. Jos η on kuten yllä, laske

$$\int_\eta \frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}\, dz.$$

4. Laske

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}.$$

(*Vihje:* hyödynnä polkuintegraalia

$$\int_\eta \frac{1}{5 - 2(z + 1/z)} \frac{dz}{iz}.)$$

5. Olkoon $\gamma_r(t) := re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Osoita, että

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = i\pi \quad \text{ja} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

(*Vihje:* Toisessa osassa huomaa, että $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}$. Mitä voit sanoa $\operatorname{Im} z$:stä, kun $z = \gamma_R(t)$ ja $t \in [0, \pi]$?)

6. Osoita, että

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi.$$

(*Vihje:* Valitse $0 < r < R < \infty$. Kokeile hyödyntää funktion e^{it}/t integraalia välillä $[-R, -r] \cup [r, R]$, mitä voidaan arvioida integroimalla $z \mapsto e^{iz}/z$ pitkin suljettua polkua $[-R, -r] \star \overleftarrow{\gamma_r} \star [r, R] \star \gamma_R$, missä γ_r, γ_R ovat kuten tehtävässä 5.)