Complex analysis 1
Exercises 6, 23.2.2024
(suomeksi toisella sivulla)

1. Draw a rough sketch of the following paths in $\mathbb{C}$ and explain briefly how the curve traces out its trajectory:
(i) $\gamma(t) = t^2 + it^4$ for $t \in [-1, 1]$
(ii) $\gamma(t) = e^{-it^2}$ for $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$
(iii) $\gamma(t) = 2\cos t + i \sin t$ for $t \in [0, 2\pi]$

2. If $\gamma(t) = te^{it}$ for $0 \leq t \leq \pi$, evaluate:
(i) $\int_\gamma \bar{z}\, dz$
(ii) $\int_\gamma |z|\, |dz|$
(iii) $\int_\gamma |z|\, dz$

3. Evaluate $\int_\gamma z^2\, dz$ and $\int_\gamma e^z$, where $\gamma(t) = t + i(t^2/\pi)$ for $0 \leq t \leq \pi$. (*Hint:* primitives.)

4. Prove Proposition 4.3.10 (integration by parts): Let $U \subset \mathbb{C}$ be open, and let $\gamma\colon [a, b] \to U$ be a piecewise C^1-path. Assume that $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ are analytic. Assume additionally that f', g' are continuous. Show that
$$\int_\gamma f(z)g'(z)\, dz = [f(\gamma(b))g(\gamma(b)) - f(\gamma(a))g(\gamma(a))] - \int_\gamma g(z)f'(z)\, dz.$$

5. Consider the map $f(z) = \bar{z}$, defined for $z \in \mathbb{C}$.
(a) Show that f does **not** have a primitive in any open set $U \subset \mathbb{C}$. (*Hint:* compute $\int_\gamma f(z)\, dz$ for some circle path γ in U.)
(b) In Theorem 5.1.4, if U is convex and $a \in U$, we explicitly defined
$$F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta$$
and showed that F is a primitive of f. What goes wrong in the proof when $f(z) = \bar{z}$ and why isn't F above a primitive of f? Calculate F explicitly!

6. Let $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, let $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$, and let Δ be a triangle containing the origin. Assume it to be known that $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 2\pi i$. Why does this not contradict Cauchy's theorem (Theorem 5.1.1)? What would go wrong in the proof of Cauchy's theorem if one tries to apply the proof to this f? Finally, prove that $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 2\pi i$ for a suitable triangle Δ containing 0.

Kompleksianalyysi 1

Demo 6, 23.2.2024

(English on the other page)

1. Piirrä hahmotelma seuraavista käyristä ja selitä lyhyesti, miten käyrä liikkuu alkupisteestä loppupisteeseen:
   (i) $\gamma(t) = t^2 + it^4$, $t \in [-1, 1]$
   (ii) $\gamma(t) = e^{-it^2}$, $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$
   (iii) $\gamma(t) = 2\cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

2. Olkoon $\gamma(t) = te^{it}$ missä $0 \leq t \leq \pi$. Laske seuraavat integraalit:
   (i) $\int_\gamma \bar{z}\, dz$
   (ii) $\int_\gamma |z|\, |dz|$
   (iii) $\int_\gamma |z|\, dz$

3. Laske $\int_\gamma z^2\, dz$ ja $\int_\gamma e^z$, missä $\gamma(t) = t + i(t^2/\pi)$ ja $0 \leq t \leq \pi$. (*Vihje:* primitiivit.)

4. Todista Propositio 4.3.10 (osittain integrointi): Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin, ja olkoon $\gamma\colon [a, b] \to U$ paloittain C^1 käyrä. Olkoot $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ analyyttisiä ja f', g' jatkuvia. Osoita, että
$$\int_\gamma f(z)g'(z)\, dz = [f(\gamma(b))g(\gamma(b)) - f(\gamma(a))g(\gamma(a))] - \int_\gamma g(z)f'(z)\, dz.$$

5. Olkoon $f(z) = \bar{z}$ missä $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Osoita, että funktiolla f ei ole primitiiviä missään avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{C}$. (*Vihje:* laske $\int_\gamma f(z)\, dz$ jollekin ympyräpolulle γ joukossa U.)
   (b) Lauseessa 5.1.4, jos U on konveksi ja $a \in U$, määrittelimme
$$F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta$$
   ja osoitimme, että F on funktion f primitiivii. Mikä kohta todistuksessa ei toimi jos $f(z) = \bar{z}$, ja miksi ylläoleva F ei ole funktion f primitiivi? Laske F eksplisiittisesti.

6. Olkoon $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$, ja olkoon Δ kolmio, joka sisältää origon. Oletetaan tunnetuksi, että $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 2\pi i$. Miksi tämä ei ole ristiriidassa Cauchyn lauseen (Lause 5.1.1) kanssa? Miksi Cauchyn lauseen todistus ei toimi tässä tilanteessa? Todista lopuksi, että $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 2\pi i$ sopivalle origon sisältävälle kolmiolle Δ.