Complex analysis 1

Exercises 4, 9.2.2024

(suomeksi toisella sivulla)

1. For each of the following functions determine the largest open set in $\mathbb{C}$ where the function is analytic, and use the differentiation rules in the lecture notes to calculate its complex derivative:
   (a) $f(z) = z^4 - 2iz^3 + 1$
   (b) $g(z) = (z-i)/(z+i)$
   (c) $h(z) = z^4(1-z)^6$
   (d) $k(z) = \sqrt{2z}$

2. Let $f : U \to \mathbb{C}$, $g : U \to \mathbb{C}$ and $h : U \to \mathbb{C}$ be analytic in U with $h(z) \neq 0$ for all $z \in U$. Prove that fg and f/h are analytic in U and

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$(f/h)'(z) = \frac{f'(z)h(z) - f(z)h'(z)}{h(z)^2}.$$

3. Prove that $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ is not complex differentiable at any point of $\mathbb{C}$.

4. Let $f : U \to \mathbb{C}$ be analytic, and define $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Show that g is analytic in $U^* = \{\bar{z} : z \in U\}$ and that $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.

5. Let $S = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2\}$ and $f : S \to \mathbb{C} \setminus [1,\infty)$, $f(z) = \sin z$. Assuming that f is known to be bijective with continuous inverse, define

$$\operatorname{Arcsin} w := f^{-1}(w), \qquad w \in \mathbb{C} \setminus [1,\infty).$$

   Show that Arcsin is analytic in $\mathbb{C} \setminus [1,\infty)$.

6. Assume the formula

$$\operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Log}\left[\sqrt{1-w^2} + iw\right], \qquad w \in \mathbb{C} \setminus [1,\infty).$$

   Prove that

$$(\operatorname{Arcsin})'(w) = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Kompleksianalyysi 1

Demo 4, 9.2.2024

(English on the other page)

1. Määritä seuraaville funktioille suurin avoin joukko $\mathbb{C}$:ssä, jossa funktio on analyyttinen, ja laske funktioiden kompleksiset derivaatat:
   (a) $f(z) = z^4 - 2iz^3 + 1$
   (b) $g(z) = (z - i)/(z + i)$
   (c) $h(z) = z^4(1 - z)^6$
   (d) $k(z) = \sqrt{2z}$

2. Olkoot $f : U \to \mathbb{C}$, $g : U \to \mathbb{C}$ ja $h : U \to \mathbb{C}$ analyyttisiä joukossa U ja $h(z) \neq 0$ kaikilla $z \in U$. Osoita, että fg ja f/h ovat analyyttisiä joukossa U ja
$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$(f/h)'(z) = \frac{f'(z)h(z) - f(z)h'(z)}{h(z)^2}.$$

3. Todista, että $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ ei ole kompleksiderivoituva missään joukon $\mathbb{C}$ pisteessä.

4. Olkoon $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Osoita, että $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ on analyyttinen joukossa $U^* = \{\bar{z} : z \in U\}$ ja $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.

5. Olkoon $S = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2\}$ ja $f : S \to \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, $f(z) = \sin z$. Oletetaan tunnetuksi, että f on bijektio ja sen käänteiskuvaus on jatkuva. Määritellään
$$\mathrm{Arcsin}\, w := f^{-1}(w), \qquad w \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty).$$
Osoita, että Arcsin on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$.

6. Oletetaan tunnetuksi, että
$$\mathrm{Arcsin}\, w = -i \,\mathrm{Log}\left[\sqrt{1 - w^2} + iw\right], \qquad w \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty).$$
Todista, että
$$(\mathrm{Arcsin})'(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}.$$