

Complex analysis 1
Exercises 3, 2.2.2024
(suomeksi toisella sivulla)

1. Express in the form $x + iy$:
 - (a) $\text{Log}(-e^2)$
 - (b) $\text{Log}(1 - i\sqrt{3})$
 - (c) $i^{\text{Log } i}$
 - (d) $(\sqrt{3} + i)^{6-i}$
2. Find complex numbers z, w such that $\text{Arg}(zw) \neq \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$ and $\text{Log}(zw) \neq \text{Log}(z) + \text{Log}(w)$.
3. Verify that $\text{Log}(1 - z^2) = \text{Log}(1 - z) + \text{Log}(1 + z)$ when $|z| < 1$. What can be said about $\text{Log}[(1 - z)/(1 + z)]$ for such z ? (*Hint*: it may help to draw a picture.)
4. Which of the following sets are open, closed, or neither open nor closed? Justify your answer briefly.
 - (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
 - (b) $B = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) \leq \pi\}$
 - (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| \leq 1\}$
 - (d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \text{ and } \text{Im}(z) \text{ are rational}\}$.(*Hint*: for (a)–(c) it may be helpful to draw the sets.)
5.
 - (a) Show that $z \mapsto \bar{z}$ and $z \mapsto |z|$ are continuous in \mathbb{C} .
 - (b) Show that $z \mapsto \frac{1}{z}$ is continuous in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 - (c) Show that the principal square root $\sqrt{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is continuous in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, but not continuous in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. How about continuity at 0? Finally, is $\sqrt{\cdot}: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ continuous? (*Hint*: you may assume that Arg is continuous in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.)
6. A *square root function* $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ is any function satisfying $(g(w))^2 = w$ for all $w \in X \subset \mathbb{C}$. Show that there does **not** exist a continuous square root function $g: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, where S^1 is the unit circle. (*Hint*: one approach is to try to solve $(g(w))^2 = w$ and to derive a contradiction.)

Kompleksianalyysi 1
Demo 3, 2.2.2024
(English on the other page)

1. Esitä muodossa $x + iy$:
 - (a) $\text{Log}(-e^2)$
 - (b) $\text{Log}(1 - i\sqrt{3})$
 - (c) $i^{\text{Log } i}$
 - (d) $(\sqrt{3} + i)^{6-i}$
2. Etsi kompleksiluvut z, w , joille $\text{Arg}(zw) \neq \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$ ja $\text{Log}(zw) \neq \text{Log}(z) + \text{Log}(w)$.
3. Osoita, että $\text{Log}(1 - z^2) = \text{Log}(1 - z) + \text{Log}(1 + z)$ kun $|z| < 1$. Voidaanko lausekkeelle $\text{Log}[(1 - z)/(1 + z)]$ osoittaa jotain vastaavaa, kun $|z| < 1$? (*Vihje*: kuvasta voi olla apua.)
4. Mitkä seuraavista joukoista ovat avoimia, suljettuja, tai ei avoimia eikä suljettuja? Perustele lyhyesti.
 - (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
 - (b) $B = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) \leq \pi\}$
 - (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| \leq 1\}$
 - (d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \text{ ja } \text{Im}(z) \text{ ovat rationaalilukuja}\}$.(*Vihje*: kohdissa (a)–(c) voi olla hyödyllistä piirtää joukot.)
5.
 - (a) Osoita, että $z \mapsto \bar{z}$ ja $z \mapsto |z|$ ovat jatkuvia joukossa \mathbb{C} .
 - (b) Osoita, että $z \mapsto \frac{1}{z}$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 - (c) Osoita, että pääneliöjuuri $\sqrt{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, mutta ei joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Onko pääneliöjuuri jatkuva pisteessä 0? Lopuksi, onko $\sqrt{\cdot}: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva? (*Vihje*: voit olettaa, että Arg on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.)
6. *Neliöjuurifunktio* $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ on funktio, jolle pätee $(g(w))^2 = w$ kaikille $w \in X \subset \mathbb{C}$. Osoita, että ei ole olemassa jatkuvaa neliöjuurifunktiota $g: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, missä S^1 on yksikköympyrä. (*Vihje*: voit esimerkiksi yrittää ratkaista yhtälön $(g(w))^2 = w$ ja johtaa ristiriidan.)