Complex analysis 1

Exercises 2, 26.1.2024

(suomeksi seuraavalla sivulla)

1. Compute $(1+i)^6$.

2. Compute all square roots of $-1+\sqrt{3}i$ and all cube roots of -8. Which of these roots are principal roots? (Hint: one of the angles in the right triangle with sides 1, $\sqrt{3}$ and 2 is $\pi/3$.)

3. Show the formulas for triple sines and cosines:

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = -\sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha, \\ \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (*Hint:* Use Euler's formula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.)

4. Show that for any $z \in \mathbb{C}$ one has the formulas

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}},$$
$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1.$$

5. Prove, by completing the square, that the solutions $z \in \mathbb{C}$ of a quadratic equation $az^2 + bz + c = 0$ where $a, b, c \in \mathbb{C}$ with $a \neq 0$ are given by the standard quadratic formula

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

   Here $\sqrt{w}$ denotes the principal square root of $w \in \mathbb{C}$, as usual.

6. For any $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, prove Lagrange's identity

$$|z_1w_1 + z_2w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1\bar{w}_2 - z_2\bar{w}_1|^2.$$

   Use this to prove the Cauchy-Schwarz inequality

$$|z_1w_1 + z_2w_2| \leq (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}(|w_1|^2 + |w_2|^2)^{1/2}.$$

Kompleksianalyysi 1

Demo 2, 26.1.2024

(English on previous page)

1. Laske $(1+i)^6$.

2. Määritä kaikki luvun $-1+\sqrt{3}i$ neliöjuuret ja kaikki luvun -8 kuutiojuuret. Mitkä näistä ovat pääjuuria? (Vihje: suorakulmaisessa kolmiossa, jonka sivut ovat 1, $\sqrt{3}$ and 2, yksi kulmista on $\pi/3$.)

3. Osoita sinin ja kosinin kolminkertaisen kulman kaavat:

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = -\sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha, \\ \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (*Vihje:* Käytä Eulerin kaavaa $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.)

4. Osoita, että kaikille $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}},$$
$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1.$$

5. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{C}$ ja $a \neq 0$. Todista täydentämällä neliöksi, että kaikki toisen asteen yhtälön $az^2+bz+c=0$ kompleksiratkaisut z saadaan tutusta ratkaisukaavasta

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

   Tässä $\sqrt{w}$ on luvun $w \in \mathbb{C}$ pääneliöjuuri.

6. Jos $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, todista Lagrangen identiteetti

$$|z_1w_1 + z_2w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1\bar{w}_2 - z_2\bar{w}_1|^2.$$

   Osoita tämän nojalla Cauchy-Schwarzin epäyhtälö

$$|z_1w_1 + z_2w_2| \leq (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}(|w_1|^2 + |w_2|^2)^{1/2}.$$