Complex analysis 1

Exercises 1, 19.1.2024

(suomeksi seuraavalla sivulla)

Passing the course is based on solving at least 30% of the exercises and getting at least 15 points (out of 30) from the course exam. The exercises will give you bonus points to the exam, cf. table below. The 15 required points from the exam may partially consist of these bonus points.

≥ 30 % of points	1
≥ 40 %	2
≥ 55%	3
≥ 70%	4
≥ 80%	5

1. Write the following complex numbers in the form $a + bi$ for some $a, b \in \mathbb{R}$:
   (a) $(1 + 5i) + (-2 + 3i)$
   (b) $(2 - i)(1 + 4i)$
   (c) $(3 - 4i)^2$
   (d) $(1 + i)^{-1}$

2. Find all complex numbers z that satisfy the equation $z + i = 2(1 - \bar{z})$.

3. Using the definition of the complex product (Definition 1.2.1), prove that for any $z, w, v \in \mathbb{C}$ one has $zw = wz$ (commutativity), $z(wv) = (zw)v$ (associativity), and $z \cdot 1 = z$ (multiplicative identity element).

4. Let $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Show that
$$\max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} \leq |z|, \quad \overline{w^{-1}} = \bar{w}^{-1}, \quad \text{and} \quad (zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}.$$
   Show that the real and imaginary parts of z can be expressed as
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

5. Let $w \in \mathbb{C}$. Show by direct calculation, using the form $z = a + bi$ with $a, b \in \mathbb{R}$, that there exists $z \in \mathbb{C}$ such that $z^2 = w$. How many solutions can you find if $w \neq 0$?

6. Let $a \in \mathbb{C}$ with $|a| < 1$. Show that
$$\left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z| \leq 1.$$

Kompleksianalyysi 1

Demo 1, 19.1.2024

(English on previous page)

Kurssin voi suorittaa tekemällä vähintään 30% demotehtävistä ja saamalla vähintään 15 pistettä (maksimi 30) kurssitentistä. Demotehtävistä saa lisäpisteitä kurssikokeeseen allaolevan taulukon mukaisesti. Läpäisyyn vaadittavat 15 pistettä kurssitentistä voivat osittain koostua bonuspisteistä.

$\geq$ 30 % pisteistä	1
$\geq$ 40 %	2
$\geq$ 55%	3
$\geq$ 70%	4
$\geq$ 80%	5

1. Kirjoita seuraavat kompleksiluvut muodossa $a + bi$ joillekin $a, b \in \mathbb{R}$:
   (a) $(1 + 5i) + (-2 + 3i)$
   (b) $(2 - i)(1 + 4i)$
   (c) $(3 - 4i)^2$
   (d) $(1 + i)^{-1}$

2. Etsi kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $z + i = 2(1 - \bar{z})$.

3. Todista käyttämällä kompleksitulon määritelmää (Määritelmä 1.2.1), että kaikille $z, w, v \in \mathbb{C}$ pätee $zw = wz$ (kommutatiivisuus), $z(wv) = (zw)v$ (assosiatiivisuus), and $z \cdot 1 = z$ (kertolaskun yksikköalkio).

4. Olkoot $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Osoita, että
$$\max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} \leq |z|, \quad \overline{w^{-1}} = \bar{w}^{-1}, \quad \text{and} \quad (zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}.$$
   Näytä, että luvun z reaali- ja imaginääriosat ovat muotoa
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

5. Olkoon $w \in \mathbb{C}$. Osoita suoralla laskulla käyttämällä muotoa $z = a + bi$ missä $a, b \in \mathbb{R}$, että on olemassa $z \in \mathbb{C}$, jolle $z^2 = w$. Kuinka monta ratkaisua löydät jos $w \neq 0$?

6. Olkoon $a \in \mathbb{C}$ ja $|a| < 1$. Osoita, että
$$\left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z| \leq 1.$$