Kompleksianalyysi 1

Luentomuistiinpanot, kevät 2024

(käännetty englannista tekoälyä apuna käyttäen)

Mikko Salo

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto

"The natural development of this work soon led the geometers in their studies to embrace imaginary as well as real values of the variable... It came to appear that, between two truths of the real domain, the easiest and shortest path quite often passes through the complex domain." (Paul Painlevé 1900)

Sisällys

Johdanto

Tämä kurssi antaa johdatuksen kompleksilukuihin ja kompleksimuuttujan analyyttisiin funktioihin. Kompleksiluvut löydettiin 1500-luvulla keinona etsiä “kuvitteellisia”ratkaisuja yhtälöihin. 1800-luvulla kompleksianalyysistä tuli tärkeä osa matematiikkaa. Nykyään kompleksilukuja ja -funktioita pidetään hyvin “todellisina”, ja ne esiintyvät monilla matematiikan, fysiikan ja tekniikan osa-alueilla.

Kurssin aiheita ovat kompleksilukujen perusominaisuudet, analyyttiset funktiot, kompleksiderivaatat ja kompleksiset integraalit. Käsittelemme myös (lokaalia) Cauchyn lausetta ja Cauchyn integraalikaavaa, maksimimoduuliperiaatetta ja algebran peruslausetta. Periodissa 4 on mahdollista jatkaa kurssille Kompleksianalyysi 2.

Nämä luentomuistiinpanot toimivat kurssin päälähteenä. Luentorunko pohjautuu vahvasti aiempiin luentomuistiinpanoihin Tero Kilpeläiseltä [**Ki15**] ja Tuomas Orposelta [**Or23**]. Lisäselvityksiä ja kuvia annetaan luentojen aikana, joten on suositeltavaa tehdä silloinkin muistiinpanoja.

Seuraavat oppikirjat voivat olla hyödyllisiä lisälukemistona:

- Bruce P. Palka: An introduction to complex function theory, Springer, 1990 (kurssi seuraa osia I.1.1-V.4.3)
- Elias M. Stein, Rami Shakarchi: Complex analysis, Princeton University Press, 2003 (vähemmän tarkka ja etenee nopeasti, mutta selittää monet asiat elegantisti)
- Eberhard Freitag, Rolf Busam: Complex analysis, 2. painos, Universitext, Springer, 2009 (systemaattinen käsittely)

LUKU 1

Kompleksiluvut ja kompleksitaso

1.1. Johdanto

Aloitetaan motivoimalla kompleksilukujen käsitettä ja esittelemällä lyhyesti useita sovelluksia matematiikassa, fysiikassa ja tekniikassa. Tässä osiossa annamme vain muodollisia (=ei tarkkoja) argumentteja. Tarkat määritelmät annetaan myöhemmissä osioissa.

Esimerkki 1.1.1 (Toisen asteen yhtälö). Käsitellään toisen asteen yhtälöä

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Kertoimet a, b, c ovat reaalilukuja, ja haluamme löytää reaaliluvun x, joka ratkaisee tämän yhtälön. Lukiossa olemme oppineet seuraavan *toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.1.1}$$

Kaava sisältää *diskriminantin* $\Delta = b^2 - 4ac$. Neliöjuuri $\sqrt{b^2 - 4ac}$ on hyvin määritelty, kun $b^2 - 4ac \geq 0$. Jos $b^2 - 4ac > 0$, tiedämme, että on olemassa kaksi erisuurta ratkaisua, ja jos $b^2 - 4ac = 0$, tiedämme, että on vain yksi ratkaisu.

Nyt kysymme: mitä tapahtuu, kun $b^2 - 4ac < 0$? Yksinkertainen yhtälö, jossa näin tapahtuu, on

$$x^2 + 1 = 0.$$

Yksikään *reaaliluku* x ei voi ratkaista tätä yhtälöä, koska $x^2 + 1 \geq 1$ jokaiselle $x \in \mathbb{R}$. Siitä huolimatta voimme ajatella mahdollisuutta, että jokin *yleisempi luku* x voisi ratkaista tämän yhtälön. Jos jokin x on ratkaisu, niin $x^2 = -1$. Muodollisesti voisimme kirjoittaa

$$x = \sqrt{-1}.$$

Toinen ratkaisu voisi olla $x = -\sqrt{-1}$. Muodollisesti voisimme siis määritellä *imaginääriyksikön*

$$i = \sqrt{-1}.$$

Imaginääriyksikkö on "yleistetty luku", joka toteuttaa $i^2 = -1$. Olettaen tällaisen luvun olemassaolon, voimme muodollisesti määritellä *kompleksiluvun* z lausekkeena

$$z = a + bi,$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$. Tavoitteena olisi myös laskea näillä luvuilla. (Nimi *kompleksiluku* esiteltiin Gaussin toimesta vuonna 1831.)

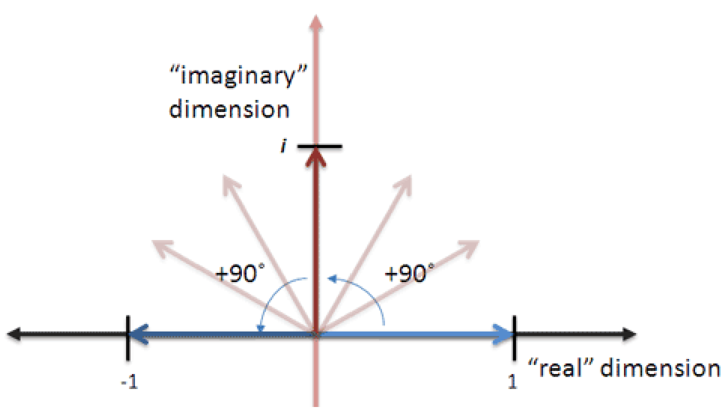
Luonnollinen tapa laskea kahden tällaisen luvun $z = a + bi$ ja $w = c + di$ summa olisi

$$z + w = (a + c) + (b + d)i. \tag{1.1.2}$$

Periaatteessa on monia tapoja kertoa luvut z ja w. Esimerkiksi voimme kokeilla tuloa $z \times w = (ac) + (bd)i$. Tämä tulo ei kuitenkaan aina ole hyödyllinen. Selviää, että on olemassa yksikäsitteinen tulo, joka on kommutatiivinen ($z \cdot w = w \cdot z$) ja distributiivinen ($z \cdot (w + r) = z \cdot w + z \cdot r$). Muodollisesti

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot (c + di) + bi \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Kaavat (1.1.2) ja (1.1.3) liittyvät *algebralliseen lähestymistapaan* kompleksilukuihin. Ehkä intuitiivisempi *geometrinen lähestymistapa* on, että kompleksiluku $a + bi$ samastetaan vektoriin (a, b) $\mathbb{R}^2$:ssa. Vektorit $(a, 0)$ ovat x-akselilla (reaalinen akseli), kun taas vektorit $(0, b)$ ovat y-akselilla, jota tässä yhteydessä kutsutaan *imaginääriakseliksi*.



Kompleksiluvut tulivat ensimmäisen kerran esiin italialaisen matematiikon Girolamo Cardanon kolmannen ja neljännen yhtälön ratkaisuja käsittelevässä työssä noin vuonna 1545. Cardano kirjoittaa (tekoälyn käännös): "Hylkäämällä henkiset kidutukset ja kertomalla $5 + \sqrt{-15}$ ja $5 - \sqrt{-15}$, saamme tulokseksi

$25-(-15)$. Siksi tulo on 40. ... ja näin pitkälle matemaattinen hienovaraisuus menee, josta tämä, äärimmäinen, on, kuten sanoin, niin hienovaraista, että se on hyödytöntä.”

Esimerkki 1.1.2 (Korkeamman asteen yhtälöt). Toisen asteen yhtälöllä $ax^2+bx+c=0$ on aina kaksi kompleksista ratkaisua (jotka ovat yhtäsuuria, jos $b^2-4ac=0$), ja ne saadaan ratkaisukaavasta (1.1.1). Jos $b^2-4ac<0$, meidän on tulkittava neliöjuuri “imaginäärisenä lukuna”seuraavasti:

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(4ac-b^2)\cdot(-1)}=\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}=i\sqrt{4ac-b^2}.$$

Olkoon sitten $p,q\in\mathbb{R}$ ja tarkastellaan kolmannen asteen yhtälöä

$$t^3+pt+q=0.$$

Cardano julkaisi vuonna 1545 ratkaisukaavan

$$t=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}\right)^{1/2}+\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}, \tag{1.1.4}$$

jossa $\Delta=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$ on *diskriminantti*. Jos $\Delta<0$, yhtälöllä on kolme reaaliratkaisua, ja kaikki kolme ratkaisua voidaan saada kaavasta (1.1.4) kunhan juuret tulkitaan sopivasti kompleksilukuina. (Jos $\Delta\geq 0$, yhtälöllä on kolme kompleksiratkaisua, joista ainakin yksi on reaalinen, ja ne saadaan hieman muuntamalla kaavaa (1.1.4).)

Niels Abel osoitti vuonna 1824, että yleisen asteen $n\geq 5$ yhtälöä

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

ei voida ratkaista juurten avulla. Kuitenkin *algebran peruslause* sanoo, että tällaisella yhtälöllä on aina n kompleksiratkaisua (kun moninkertaiset ratkaisut huomioidaan). Todistamme algebran peruslauseen kurssin lopussa käyttäen kompleksianalyysiä.

Kompleksiluvuilla on monia muita vaikuttavia sovelluksia useilla matematiikan ja tieteen aloilla. Listataan muutamia tässä.

Esimerkki 1.1.3 (Integraalien arviointi). Määrätyt integraalit kuten

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}\,dx \quad \text{tai} \quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3+\cos^2 t}\,dt$$

voidaan laskea eksplisiittisesti kompleksianalyysin ja tehokkaan *residylauseen* avulla. Näitä aiheita käsitellään kurssilla Kompleksianalyysi 2.

Esimerkki 1.1.4 (Lukuteoria). *Riemannin zeta-funktio* määritellään kaavalla

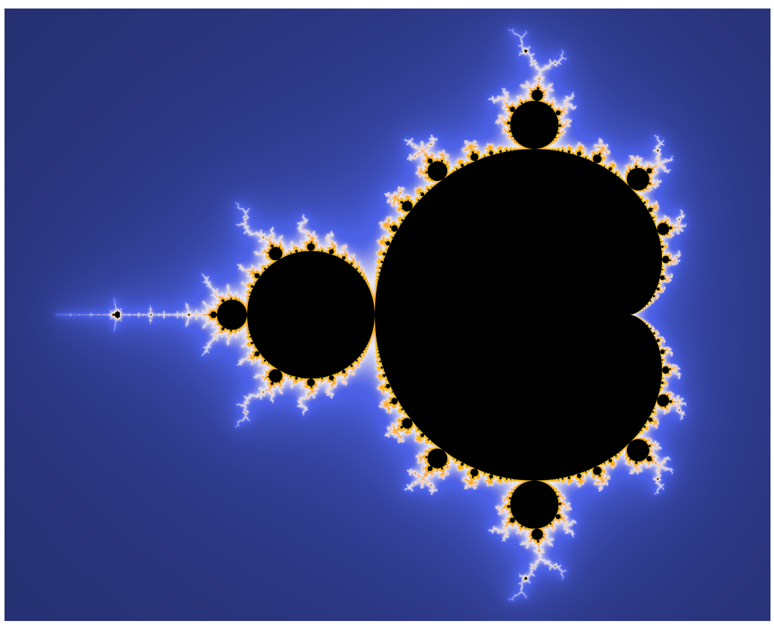
$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Summa suppenee, kun $s > 1$. Osoittautuu, että $\zeta(s)$ voidaan määritellä kompleksiluvuille s, ja tällä funktiolla on läheinen yhteys *alkulukuihin*. Esimerkiksi *alkulukulause*, joka sanoo, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{\text{alkuluvut} \leq x\}}{\frac{\log x}{x}} = 1,$$

todistettiin ensimmäisen kerran vuonna 1896 käyttäen kompleksianalyysiä ja Riemannin zeta-funktiota. Matematiikan tunnetuin ratkaisematon ongelma (ja yksi miljoonan dollarin Millennium-ongelmista) on *Riemannin hypoteesi*, joka pyytää osoittamaan, että kaikki ei-triviaalit funktion $\zeta(s)$ nollakohdat ovat muotoa $s = \frac{1}{2} + it$ missä $t \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 1.1.5 (Fraktaaligeometria). *Mandelbrotin joukko* on tunnetuin esimerkki *fraktaalista* (erittäin epäsäännöllinen joukko). Tämä joukko, kuten monet muut fraktaalit, generoidaan kompleksianalyysin avulla iteroiden funktiota $f_c(z) = z^2 + c$ eri kompleksiluvuille c.



Esimerkki 1.1.6 (Fysiikka). Monet fysiikan perusyhtälöt, kuten *Schrödingerin yhtälö* kvanttimekaniikassa,

$$i\partial_t \Psi + \Delta\Psi = 0,$$

tai *aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt* sähkömagneettisille aalloille,

$$\nabla \times E = -i\omega\mu H,$$
$$\nabla \times H = J + i\omega\varepsilon E,$$

sisältävät kompleksilukuja.

ESIMERKKI 1.1.7 (Signaalinkäsittely). Aikaperiodinen äänisignaali $f(t)$ voidaan hajottaa taajuuskomponentteihinsa *Fourierin sarjalla*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

missä kompleksinen eksponentiaali e^{ix} määritellään *Eulerin kaavan* avulla

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Toivomme, että nämä esimerkit vakuuttavat lukijan siitä, että kompleksiluvut eivät ole "kuvitteellisia"tai "hyödyttömiä", vaan pikemminkin luonnollinen ja voimakas kieli monissa matematiikan ja tieteen sovelluksissa. Toivomme myös, että tämä kurssi osoittaa, että kompleksianalyysi on rikas ja kaunis matematiikan itsenäinen teoria. On myös mainittava, että kompleksianalyysi on ollut yksi näkyvimmistä matematiikan aloista Suomessa, ja kuuluisat matemaatikot kuten Rolf Nevanlinna (Nevanlinnan teorian luoja, noin 1925) ja Lars Ahlfors (Fields-mitalin ainoa suomalainen vastaanottaja, vuonna 1936) ovat työskennelleet tällä alalla.

1.2. Kompleksilukujen algebralliset ominaisuudet

Aiemmin esittelimme kompleksiluvut lausekkeina $z = a+bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja i on erityinen imaginääriyksikkö, joka toteuttaa ehdon $i^2 = -1$. Teemme tämän määritelmän tarkaksi käsittelemällä vektoreita $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ja ottamalla muodolliset laskut, (1.1.2) ja (1.1.3), summan ja tulon *määritelmiksi*.

1.2.1. Kompleksiluvut, summat ja tulot.

MÄÄRITELMÄ 1.2.1. *Kompleksiluku* on vektori $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Kahden kompleksiluvun $z = (a, b)$ ja $w = (c, d)$ *summa* $z + w$ määritellään seuraavasti:

$$z + w = (a + c, b + d).$$

Tulo $zw = z \cdot w$ määritellään seuraavasti:

$$zw = (ac - bd, ad + bc).$$

Jos $n \geq 1$ on kokonaisluku, niin luvun z *n:s potenssi* on

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ kertaa.}}$$

Kompleksilukujen joukko merkitään

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Esimerkki 1.2.2. Pätee

$$(1,3)+(-1,2)=(1+(-1),3+2)=(0,5)$$

ja

$$(1,3)(-1,2)=(1\cdot(-1)-3\cdot 2, 1\cdot 2+3\cdot(-1))=(-7,-1).$$

Huomautus 1.2.3. Jos $z=(a,b)$ ja $w=(c,d)$ ovat kompleksilukuja, niin

$$z=w \quad \Longleftrightarrow \quad a=c \text{ ja } b=d.$$

Seuraava määritelmä mahdollistaa reaalilukujen a samastamisen kompleksilukujen $(a,0)$ kanssa.

Määritelmä 1.2.4. Jos $a\in\mathbb{R}$, samastamme a:n kompleksiluvun $(a,0)$ kanssa. Erityisesti

$$\begin{aligned}0&=(0,0),\\ 1&=(1,0).\end{aligned}$$

Jos $z=(a,b)$ on kompleksiluku, kirjoitamme $-z=(-a,-b)$.

Varoitus 1.2.5. Kompleksiluvuilla, toisin kuin reaaliluvuilla, ei ole luonnollista järjestystä. Jos kirjoitetaan $a\le b$ jne., niin tällöin oletetaan, että a ja b ovat reaalilukuja.

Näytämme nyt, että kompleksiluvut toteuttavat monia luonnollisia ominaisuuksia, joita myös reaaliluvuilla on. Algebra 1 -kurssin suorittaneet voivat huomata, että joukko $\mathbb{C}$ muodostaa *kommutatiivisen renkaan*.

Lause 1.2.6 (Renkaan ominaisuudet). *Kaikilla $z,w,v\in\mathbb{C}$ pätee*

$$\begin{aligned}
&z+w=w+z, \quad zw=wz && \textit{(kommutatiivisuus)}\\
&z+(w+v)=(z+w)+v, \quad z(wv)=(zw)v && \textit{(assosiatiivisuus)}\\
&z(w+v)=zw+zv && \textit{(distributiivisuus)}\\
&z+(-z)=0 && \textit{(additiivinen käänteisalkio)}\\
&z+0=z, \quad z\cdot 1=z && \textit{(yksikköalkio).}
\end{aligned}$$

Todistus. Osoitamme vain distributiivisuuden ja jätämme muut osat harjoitustehtäviksi. Olkoon $z=(a,b)$, $w=(c,d)$ ja $v=(x,y)$. Silloin

$$\begin{aligned}
z(w+v)&=(a,b)\cdot(c+x,d+y)\\
&=(a(c+x)-b(d+y),a(d+y)+b(c+x))\\
&=(ac-bd,ad+bd)+(ax-by,ay+bx)\\
&=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(x,y)\\
&=zw+zv.
\end{aligned}$$

□

1.2.2. Imaginaariyksikkö. Miten imaginääriyksikkö i sopii yllä esitettyyn teoriaan? Muistutamme, että i pitäisi olla kompleksiluku, jolle pätee $i^2 = -1 = (-1, 0)$. Tällaisen luvun löytäminen on helppoa:

MÄÄRITELMÄ 1.2.7. *Imaginaariyksikkö* on kompleksiluku

$$i = (0, 1).$$

Reaaliosa $\mathrm{Re}(z)$ ja *imaginaariosa* $\mathrm{Im}(z)$ luvusta $z = (a, b)$ ovat

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= a, \\ \mathrm{Im}(z) &= b. \end{aligned}$$

Samastamme nyt kompleksiluvut $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ja lausekkeet $a + bi$ kuten luvussa 1.1.

LAUSE 1.2.8 (Perusominaisuuksia).
(i) $i^2 = -1$.
(ii) *Pätee* $(a, b) = a + bi$ *ja* $\mathrm{Re}(a + bi) = a$, $\mathrm{Im}(a + bi) = b$.
(iii) *Mikä tahansa kompleksiluku* z *voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa* $z = a + bi$ *joillakin* $a, b \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. (i) Pätee

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

(ii) Annetulle $(a, b) \in \mathbb{C}$ pätee

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Seuraa $\mathrm{Re}(a + bi) = a$ ja $\mathrm{Im}(a + bi) = b$.

(iii) Kohdan (ii) perusteella mikä tahansa $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ voidaan esittää muodossa $z = a+bi$. Yksikäsitteisyydestä seuraa, että jos $z = a+bi = c+di$ jollakin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, niin kohdasta (ii) sovellettuna (a, b):hen ja (c, d):hen saadaan $(a, b) = (c, d)$, joten $a = c$ ja $b = d$. Tämä osoittaa, että on vain yksi mahdollinen tapa esittää $z \in \mathbb{C}$ muodossa $z = a + bi$. Tulos seuraa. □

Tästä eteenpäin, Lauseen 1.2.8 perusteella, kirjoitamme usein kompleksiluvut muodossa $a+bi$ muodon (a, b) sijasta, koska tämä helpottaa laskuja. Erityisesti ei ole tarpeen muistaa tulon määritelmää Määritelmässä 1.2.1 esityssä muodossa, vaan vain seuraava sääntö:

> Kompleksiluvuilla $a+bi$ lasketaan kuten reaaliluvuilla, kunhan kerätään yhteen kaikki termit, joissa on i, ja pidetään mielessä, että $i^2 = -1$.

Esimerkki 1.2.9. Potenssit i:stä voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = (1) \cdot i = i, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lisäksi voidaan laskea

$$(3+2i) + (4-3i) = (3+4) + (2-3)i = 7 - i$$

ja

$$(3+2i)(4-3i) = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 3i + 2i \cdot 4 - 2i \cdot 3i = 12 - 9i + 8i + 6 = 18 - i.$$

1.2.3. Jakolasku. Osoitamme nyt, miten kompleksiluvulla voidaan jakaa. Jos $z = a + bi$ on nollasta poikkeava (eli $a \neq 0$ tai $b \neq 0$), laskemme muodollisesti

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}. \tag{1.2.1}$$

Käytämme tätä tulosta määritelmänä (käytännössä riittää muistaa aiempi lasku määritelmän sijaan):

Määritelmä 1.2.10. Jos $z = a + bi \neq 0$, sen käänteisluku on

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i.$$

Jos $w \in \mathbb{C}$, määrittelemme $\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1}$.

Yhdessä Lauseen 1.2.6 kanssa seuraava tulos osoittaa, että $\mathbb{C}$ on *kunta* kurssin Algebra 1:n kielellä:

Lause 1.2.11. *Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ ja $z \neq 0$ pätee $z \cdot z^{-1} = 1$.*

Esimerkki 1.2.12. Pätee

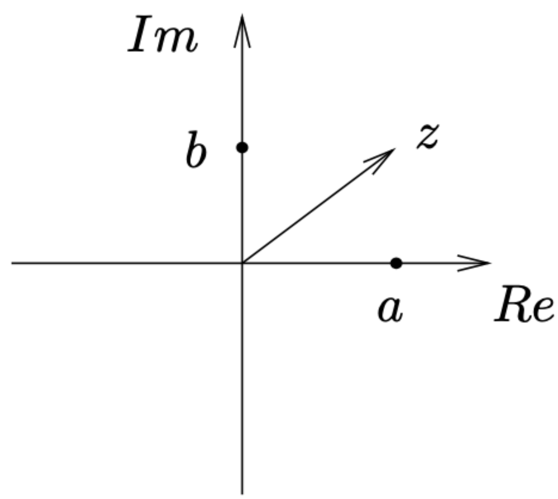
$$\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25} i$$

ja

$$\frac{2-5i}{3+4i} = (2-5i)\frac{1}{3+4i} = (2-5i)\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i.$$

1.3. Kompleksilukujen geometriset ominaisuudet

Olemme käsitelleet kompleksilukujen perusominaisuuksia. Tässä vaiheessa on hyödyllistä tarkastella kompleksilukuja geometrisesta näkökulmasta. Määritelmän mukaan joukko $\mathbb{C}$ on yksinkertaisesti $\mathbb{R}^2$, ja kompleksiluku $z = a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, voidaan samastaa vektoriin $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Joukkoa $\mathbb{C}$ kutsutaan usein *kompleksitasoksi*, ja kompleksilukuja voidaan kuvata vektoreina tasossa.



1.3.1. Moduuli ja kompleksikonjugaatti. Seuraavaksi esitämme kaksi hyödyllistä suuretta jokaiselle kompleksiluvulle $z \in \mathbb{C}$: sen *moduuli* ja *kompleksikonjugaatti*. Aloittakaamme moduulista. Lukijalle on luultavasti tuttu Euklidinen normi $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ tasossa $\mathbb{R}^2$. Historiallisista syistä tätä suuretta kutsutaan usein "moduuliksi" kompleksianalyysissä - se on kuitenkin täsmälleen sama asia.

Määritelmä 1.3.1 (Moduuli). Olkoon $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Tällöin z:n *moduuli* on luku

$$|z| := \|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Propositio 1.3.2. *Jos $z, w \in \mathbb{C}$, niin $|z + w| \leq |z| + |w|$.*

Todistus. Tämä on Euklidisen normin $\| \cdot \|$ kolmioepäyhtälö! $\square$

Siirrymme sitten kompleksikonjugaattiin (katso Kuva 1):

Määritelmä 1.3.3 (Kompleksikonjugaatti). Olkoon $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Tällöin z:n *kompleksikonjugaatti* on luku $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 1.3.4. Jos $z = 3 + 4i$, niin $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ ja $\bar{z} = 3 - 4i$.

Moduulin, konjugaatin ja kompleksiluvun käänteisluvun välillä on kaunis yhteys:

Propositio 1.3.5. *Olkoon* $z \in \mathbb{C}$. *Tällöin* $z\bar{z} = |z|^2$. *Erityisesti* $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$, *jos* $z \neq 0$.

Todistus. Kirjoitetaan $z = a + bi$, joten $\bar{z} = a - bi$. Nyt

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Tämä on se, mitä väitimme. Kaava $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ seuraa yhtälöä kertomalla $z^{-1}/|z|^2$. (Olemme nähneet tämän kaavan z^{-1}:lle aiemmin kaavassa (1.2.1).) □

Kompleksikonjugaatio ja kertolasku pelaavat hyvin yhteen:

Propositio 1.3.6. *Olkoon* $z, w \in \mathbb{C}$. *Tällöin* $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

Todistus. Tämä on suora lasku. Olkoon $z = a + ib$ ja $w = c + id$. Silloin,

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} \\ &= (ac - bd) - i(ad + bc) \\ &= (ac - (-b)(-d)) + i(a(-d) + (-b)c) \\ &= (a - ib)(c - id) = \bar{z}\bar{w}. \end{aligned}$$

Tämä on se, mitä väitimme. □

Lukujen $x, y \in \mathbb{R}$ osalta tiedämme, että $|xy| = |x||y|$. On melko hämmästyttävää, että sama pätee myös luvuille $z, w \in \mathbb{C}$:

Korollaari 1.3.7. *Olkoon* $z, w \in \mathbb{C}$. *Tällöin* $|zw| = |z||w|$.

Todistus. Käytämme Lauseita 1.3.5-1.3.6 ja kompleksiluvun kertolaskun vaihdannaisuutta:

$$|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2.$$

Todistus saadaan päätökseen ottamalla neliöjuuret. □

Tässä on joitakin muita hyödyllisiä ominaisuuksia moduulista ja konjugaatista:

Propositio 1.3.8. *Olkoon* $z, w \in \mathbb{C}$. *Tällöin,*

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad |z| = |\bar{z}|, \quad \text{ja}$$
$$\max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} \leq |z|.$$

Jos $z \neq 0$, niin $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$. Viimeiseksi, luvun z reaali- ja imaginaariosat voidaan ilmaista konjugaatin avulla seuraavasti:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \textit{ja} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{1.3.1}$$

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

ESIMERKKI 1.3.9. Haluamme kuvailla geometrisesti joukkoa

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2|z+1|\}.$$

Olkoon $z = x + iy$. Meillä on ekvivalenssiketju:

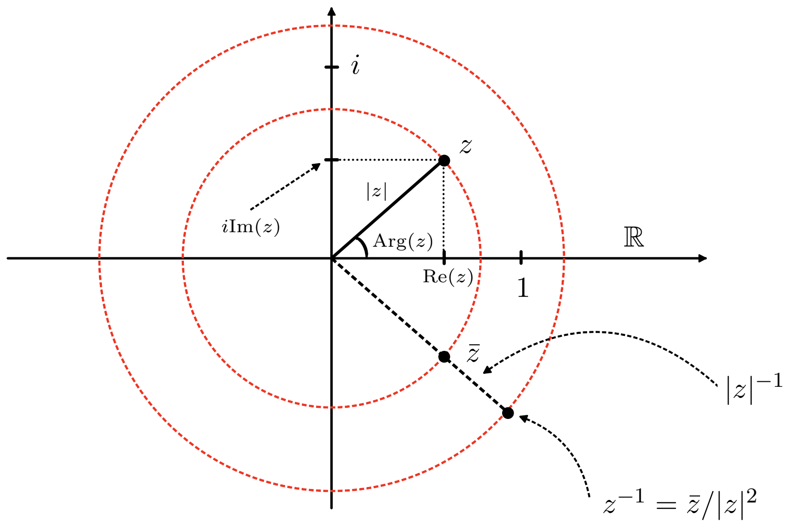
$$\begin{aligned}
z \in S \quad &\iff \quad |z-1| = 2|z+1| \\
&\iff \quad |z-1|^2 = 4|z+1|^2 \\
&\iff \quad (z-1)\overline{(z-1)} = 4(z+1)\overline{(z+1)} \\
&\iff \quad |z|^2 - (z+\bar{z}) + 1 = 4|z|^2 + 4(z+\bar{z}) + 4 \\
&\iff \quad |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z) + 1 = 4|z|^2 + 8\mathrm{Re}(z) + 4 \\
&\iff \quad 3|z|^2 + 10\mathrm{Re}(z) + 3 = 0 \\
&\iff \quad |z|^2 + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \mathrm{Re}(z) + 1 = 0 \\
&\iff \quad x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot x + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{16}{9} \\
&\iff \quad |(x,y) + (5/3, 0)|^2 = (4/3)^2.
\end{aligned}$$

Näin ollen S on ympyrä kompleksitasossa $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ säteellä $4/3$ ja keskipisteellä $-5/3 = (-5/3, 0)$. Voimme myös kirjoittaa $S = \{z \in \mathbb{C} : |z + 5/3|^2 = (4/3)^2$.

Edellisessä osiossa esitellyillä käsitteillä on havainnollisia geometrisia tulkintoja, kuten kuvassa 1 näkyy:

- Moduuli $|z|$ on vain vektorin $z \in \mathbb{C}$ pituus.
- Jos $z = x + iy$, kompleksikonjugaatti $\bar{z} = x - iy$ saadaan pisteestä z "peilaamalla"se reaaliakselin $\mathbb{R}$ yli.
- Kompleksiluvun käänteisarvo $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ saadaan venyttämällä konjugaattia $\bar{z}$ tekijällä $|z|^{-2}$. Kuvassa $|z| < 1$, joten venymiskerroin on suurempi kuin yksi. Huomaa, että $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$.

1.3.2. Argumentti. Kuva 1 havainnollistaa uutta käsitettä "Arg(z)". Tällä tarkoitetaan kulmaa (jota kutsutaan *argumentiksi* kompleksianalyysissä), radiaaneina, vektorin z ja positiivisen x-akselin välillä. Tämä kulma ei kuitenkaan ole yksikäsitteisesti määritelty, koska kulman muuttaminen luvulla $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, antaa saman vektorin z! Siksi määrittelyssä on oltava tarkkana.



KUVA 1. Pisteet $z, \bar{z}$ ja $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.

Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Voimme tulkita luvun $\frac{z}{|z|}$ yksikkövektorina $\mathbb{R}^2$:ssa. Nyt muistutamme seuraavasta tasogeometrian faktasta.

LEMMA 1.3.10. *Mikä tahansa yksikkövektori $v \in \mathbb{R}^2$ on muotoa*

$$v = (\cos\theta, \sin\theta)$$

joillekin $\theta \in \mathbb{R}$. Lisäksi pätee $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ jos ja vain jos $\alpha = \theta + 2\pi k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.

MÄÄRITELMÄ 1.3.11 (Argumentti). Jos $z \neq 0$ on kompleksiluku, sen (moniarvoinen) *argumentti* on joukko

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \,:\, \frac{z}{|z|} = (\cos\theta, \sin\theta)\}.$$

Pääargumentti, tai *argumentin päähaara*, $\mathrm{Arg}(z)$ on se yksikäsitteinen luku $\theta \in \arg(z)$ jolle pätee

$$\theta \in (-\pi, \pi], \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Toisin sanoen, $\mathrm{Arg}(z)$ on vektorin z ja positiivisen reaalisen akselin muodostama (mahdollisesti negatiivinen) kulma, jolle pätee

$$\begin{cases} \mathrm{Arg}(z) \in [0, \pi] & \text{jos } \mathrm{Im}(z) \geq 0, \\ \mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, 0) & \text{jos } \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Lemman 1.3.10 perusteella joukko $\arg(z)$ voidaan ilmaista muodossa

$$\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.3.2}$$

Pääargumentti Arg on vain yksi tapa valita yksi edustaja monista mahdollisista kulmista, jotka edustavat lukua z.

Esimerkki 1.3.12. $\operatorname{Arg}(i) = \pi/2$, $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$, $\operatorname{Arg}(-i) = -\pi/2$.

Huomautus 1.3.13. Funktio Arg **ei** ole jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sillä on "hyppy"negatiivisen reaaliakselin $(-\infty, 0)$ yli, missä $\operatorname{Arg}(z)$:n arvo muuttuu äkillisesti π:stä $-\pi$:hin (lähestyttäessä akselia ylhäältä).

Huomautus 1.3.14. Määritelmän mukaan pätee

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\operatorname{Arg}(z)) + i \sin(\operatorname{Arg}(z)). \tag{1.3.3}$$

Siksi voi (esimerkiksi) kirjoittaa eksplisiittisesti

$$\operatorname{Arg}(z) = \arccos\left(\tfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{1.3.4}$$

Tämä implikoi, että Arg **on** jatkuva funktio joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Kuitenkin $\operatorname{Arg}(z)$:n kirjoittamisessa tällä tavalla on oltava tarkkana valittaessa oikein arccos:in määrittelyjoukkoa ja arvojoukkoa. Jätämme näiden tosiasioiden vahvistamisen lukijalle.

Huomautus 1.3.15. Funktiota $\operatorname{Arg}(z)$ kutsutaan usein moniarvoisen (eli joukkoarvoisen) argumentin $\arg(z)$ *päähaaraksi*. Selitämme tätä terminologiaa hieman.

Jos meillä on joukkoarvoinen funktio $F(z)$, esimerkiksi $F(z) = \arg(z)$, jossakin avoimessa joukosa $X \subset \mathbb{C}$, niin *haara* (branch) joukkoarvoisesta funktiosta $F(z)$ on jatkuva funktio $f : X \to \mathbb{C}$ siten, että $f(z) \in F(z)$ kaikille $z \in X$. Tämä tarkoittaa, että *haara* on vain tapa valita yksi edustaja joukosta $F(z)$ jatkuvalla tavalla.

Esimerkiksi Arg on haara arg:sta joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, koska Arg on jatkuva tässä joukossa ja $\operatorname{Arg}(z) \in \arg(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Haarat eivät yleensä ole yksikäsitteisiä. Esimerkiksi funktio $\operatorname{Arg}_1 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ siten, että $\operatorname{Arg}_1(z)$ on ainoa piste joukosta $\arg(z) \cap (\pi, 3\pi]$ olisi toinen haara arg:sta joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Usein kompleksianalyysin oppikirjoissa puhutaan argumentin, n:nnen juuren ja kompleksisen logaritmin päähaarasta. Tämä tarkoittaa vain sitä, että valitsemme tietyn edustajan monista mahdollisista ratkaisuista. Koska n:nnen juuren ja logaritmin määrittely perustuu argumenttiin, tulemmekäyttämään pääargumenttia Arg, jonka olemme juuri määritelleet. Tämä riittää meille tällä hetkellä.

1.3.3. Kompleksitulojen geometria. Tutkitaan seuraavaksi, miten argumentti käyttäytyy kompleksitulossa. Ensiksi tarkastellaan kompleksilukuja polarikoordinaateissa.

Terminologia 1.3.16 (Polarikoordinaatit). Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $\theta \in \arg(z)$. Silloin Määritelmän 1.3.11 perusteella saadaan

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.3.5}$$

Kaavaa (1.3.5) kutsutaan *kompleksiluvun z polaraikoordinaattiesitykseksi.*

Huomaa, että z:llä on monia polaarikoordinaattiesityksiä, jokaiselle valinnalle $\theta \in \arg(z)$.

Propositio 1.3.17 (Polaariesitysten yksikäsitteisyys). *Olkoot $r, \rho \geq 0$ ja $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

jos ja vain jos

$$\begin{aligned} \rho &= r, \\ \alpha &= \theta + 2\pi k \end{aligned}$$

jollakin $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Jos $r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, niin vektoreina

$$r(\cos\theta, \sin\theta) = \rho(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Euklidisen normin ottaminen antaa $r = \rho$, ja sitten Lemman 1.3.10 käyttö antaa $\alpha = \theta + 2\pi k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Toisaalta, jos $r = \rho$ ja $\alpha = \theta + 2\pi k$, niin $r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, koska cos ja sin ovat 2π-periodisia. □

Seuraavaksi muistutetaan:

Lemma 1.3.18 (Kosinen ja sinin summakaavat). *Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Propositio 1.3.19 (Tulo polarikoordinaateissa). *Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ muotoa*

$$\begin{aligned} z_1 =& |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \\ z_2 =& |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2). \end{aligned}$$

Tällöin

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Todistus. Lemman 1.3.18 perusteella saadaan

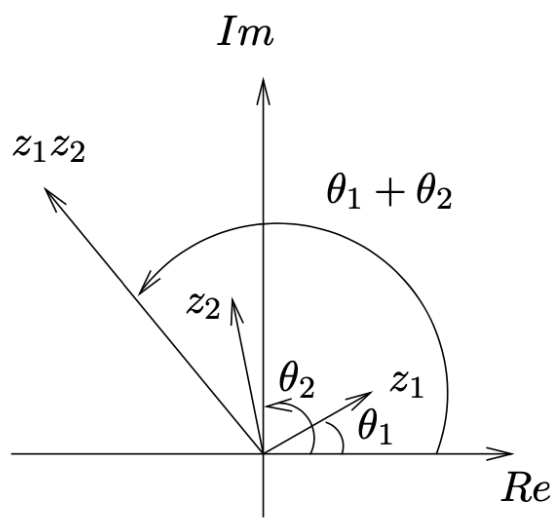
$$\begin{aligned}
&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&\quad = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\\
&\quad = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2).
\end{aligned}$$

Tämän perusteella myös

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= |z_1|\,|z_2|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= |z_1|\,|z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)).
\end{aligned}$$ □

Lause 1.3.19 mahdollistaa kahden kompleksiluvun kertolaskun kuvaamisen geometrisesti. Tässä on epämuodollinen, mutta helposti muistettava kuvaus:

> Kertoaksesi kaksi kompleksilukua, kerro modulit ja laske kulmat yhteen.



Huomautus 1.3.20. Ainoa vaaran paikka tässä epämuodollisessa kuvauksessa on, että kulma on määritelty vain 2π:n monikertoja vailla. Näin ollen vaikka $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$, saattaa tapahtua, että $\theta_1+\theta_2$ on välin $(-\pi, \pi]$ ulkopuolella. Tässä tapauksessa $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ löytämiseksi on lisättävä tai vähennettävä 2π lukuun $\theta_1+\theta_2$ (valinta on yksikäsitteinen!), jotta se saadaan takaisin alueelle $(-\pi, \pi]$.

Esimerkki 1.3.21. Katsotaan, miten tämä toimii yksinkertaisessa tapauksessa, kuten $z = -i = w$. Toki voimme suoraan laskea, että $zw =$

$(-i)(-i) = -1$, mutta päätellään sama tulos ylläolevalla geometrisella menetelmällä.

Ensin selvästi $|z| = 1 = |w|$, joten myös $|zw| = 1$. Joten zw on oltava piste yksikköympyrällä S^1. Toiseksi $\mathrm{Arg}(-i) = -\pi/2$, joten $\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(w) = -\pi/2 - \pi/2 = -\pi$. Tulos ei ole enää välillä $(-\pi, \pi]$, ja meidän on lisättävä 2π tuodaksemme se takaisin tähän väliin. Seuraa, että

$$\mathrm{Arg}(zw) = -\pi + 2\pi = \pi.$$

Näin ollen zw on piste ympyrällä S^1, jonka kulma positiivisen $\mathbb{R}$-akselin kanssa on π. Tämä piste on -1.

Esimerkki 1.3.22. Edellinen esimerkki ei ehkä ollut niin mielenkiintoinen, koska $(-i)(-i)$ on joka tapauksessa helppo laskea suoraan. Lisätään haastetta laskemalla $(1-i)^8$. Minkälainen painajainen olisikaan laskea tämä määritelmän perusteella! Onneksi on paljon nopeampi tapa. Huomaa, että $|1-i| = \sqrt{2}$, joten $|(1-i)^8| = 2^4 = 16$. Toisaalta selvästi $\mathrm{Arg}(1-i) = -\pi/4$, joten $\arg((1-i)^8)$ sisältää pisteen $8 \cdot \mathrm{Arg}(1-i) = -2\pi$. Seuraa, että

$$(1-i)^8 = |(1-i)|^8(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)) = 16.$$

1.4. Kompleksiset juuret

1.4.1. De Moivren kaava. Olemme jo nähneet Lauseen 1.3.19 todistuksessa, että

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2). \tag{1.4.1}$$

Erityisesti erikoistapaus $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ antaa

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Käyttämällä kaavaa (1.4.1) voimme jatkaa tätä induktiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \big(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\big)(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\\
&\dots\\
(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= \big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= \cos\big((n+1)\theta\big) + i\sin\big((n+1)\theta\big)
\end{aligned}$$

Tämä päättely osoittaa seuraavat tärkeät tapaukset $n \in \mathbb{N}$ seuraavasta lauseesta:

Lause 1.4.1 (De Moivren kaava). *Olkoon $n \in \mathbb{Z}$ ja $\theta \in \mathbb{R}$. Silloin*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

TODISTUS. Olemme jo osoittaneet tapaukset $n \geq 1$. Tapaukselle $n = 0$ kaava on myös totta konventiolla $z^0 = 1$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1 = \cos(0\cdot\theta) + i\sin(0\cdot\theta).$$

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $n = -1$. Muistetaan, että $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$, kun $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Kun $z = \cos\theta + i\sin\theta$, meillä on $|z|^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$. Näin ollen,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta),$$

hyödyntäen sitä, että cos on parillinen ja sin on pariton. Tämä osoittaa tapauksen $n = -1$. Yleiselle $n \in \mathbb{Z}$ ja $n < 0$, meillä on lopulta

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= \Big((\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}\Big)^{-n}\\ &= (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^{-n}\\ &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),\end{aligned}$$

soveltaen tämän todistuksen ensimmäistä osaa lukuun $-n \in \mathbb{N}$. $\square$

HUOMAUTUS 1.4.2. Myöhemmin, kun määrittelemme eksponenttifunktion e^z, osoitamme Eulerin kaavan

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Tässä vaiheessa voimme käyttää merkintää e^{ix} kätevänä *lyhenteenä* lauseelle $\cos x + i\sin x$. Tätä lyhennettä käyttäen De Moivren kaava saa muodon $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, mikä on helpompi muistaa.

1.4.2. Kompleksiset juuret. Olemme jo nähneet, että kompleksilukuja voi kertoa ja jakaa (niin kauan kuin emme jaa nollalla) ja laskea potensseja z^n. Nyt näytämme, että voimme myös ottaa kompleksiluvuista n:nnen juuren.

MÄÄRITELMÄ 1.4.3 (n:s juuri). Olkoon $z \in \mathbb{C}$ ja olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Luvun $w \in \mathbb{C}$ sanotaan olevan *n:s juuri* luvusta z, jos $w^n = z$.

Käsitellään ensin n:nnen juuren ottamista nollasta. Jos $w^n = 0$, niin ottamalla moduli saamme $|w|^n = 0$, joten $|w| = 0$ ja $w = 0$. Näin ollen ainoa n:s juuri luvusta 0 on 0. Yleisesti luvun $z \neq 0$ n:s juuri ei ole yksikäsitteinen, samalla tavoin kuin yhtälöllä $x^2 = a$ on kaksi erisuurta ratkaisua $\sqrt{a}$ ja $-\sqrt{a}$.

LAUSE 1.4.4 (Kompleksiset juuret). *Olkoon $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ja olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku. Yhtälöllä*

$$w^n = z$$

on tarkalleen n erisuurta ratkaisua $w \in \mathbb{C}$. Ratkaisut saadaan kaavasta

$$w = w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right)\right) \tag{1.4.2}$$

missä $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Todistus. Aloittamme kirjoittamalla luvun z polaarikoordinaattiesityksen (katso (1.3.3)),

$$z = |z|(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z))). \tag{1.4.3}$$

Etsimme ratkaisua w yhtälölle $w^n = z$ myös polaarikoordinaateissa, eli muodossa

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Käyttämällä De Moivren kaavaa saadaan

$$w^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \tag{1.4.4}$$

Vertaamalla (1.4.3) ja (1.4.4), pätee $w^n = z$ jos ja vain jos

$$r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = |z|(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z))).$$

Polaarikoordinaattiesityksen yksikäsitteisyyden perusteella (Propositio 1.3.17), r ja θ toteuttavat

$$\begin{aligned} r^n &= |z|, \\ n\theta &= \mathrm{Arg}(z) + 2\pi k \end{aligned}$$

joillekin $k \in \mathbb{Z}$. Ainoa positiivinen luku, joka toteuttaa $r^n = |z|$, on

$$r = \sqrt[n]{z}.$$

Seuraa, että kaikki yhtälön $w^n = z$ ratkaisut ovat muotoa (1.4.2) jollekin $k \in \mathbb{Z}$.

Saattaa näyttää siltä, että ratkaisuja w on äärettömän monta, yksi kullekin $k \in \mathbb{Z}$. Kuitenkin, koska cos ja sin ovat 2π-periodisia, voimme nähdä, että siirtyminen k:sta $k + mn$:ään jollekin $m \in \mathbb{Z}$ antaa saman kompleksiluvun w. Näin ollen on riittävää tarkastella tapauksia $k = 0, 1, \dots, n-1$. On helppo harjoitus tarkistaa, että luvut w_k kun $k = 0, 1, \dots, n-1$ ovat kaikki erisuuria, hyödyntäen tosiasiaa, että $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. □

Huomautus 1.4.5. Jos käytetään merkintää e^{ix} lausekkeen $\cos x + i\sin x$ lyhenteenä, kuten Huomautuksessa 1.4.2, on helppo muistaa, miten yhtälö $w^n = z$ ratkaistaan. Jos $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$, voidaan muodollisesti ottaa n:s juuri yhtälöstä $w^n = z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$ ja saadaan yksi ratkaisu

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}}.$$

Lause 1.4.4 näyttää, että kaikki ratkaisut saadaan kaavalla

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}+\frac{2\pi k}{n})}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Miltä ratkaisut $w^n = z$ näyttävät kompleksitasossa? Ne sijaitsevat kaikki ympyrällä, jonka säde on $r = \sqrt[n]{|z|}$ ja keskipiste on origossa. Lisäksi ne muodostavat tällä ympyrällä tasavälisen joukon, jossa on n alkiota.

Esimerkki 1.4.6. Näytetään tämä kuvalla yksinkertaisessa tapauksessa, kuten $z = -1$:

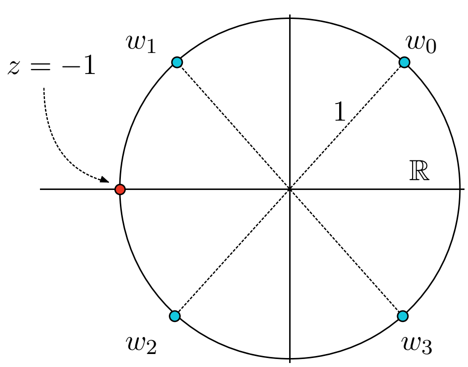
$$|z| = 1 \quad \text{ja} \quad \mathrm{Arg}(z) = \pi.$$

Nyt, kun $n = 4$ (esimerkiksi), ratkaisut yhtälölle $w^4 = -1$ ovat:

$$w_k = \cos(\pi/4 + 2\pi k/4) + i\sin(\pi/4 + 2\pi k/4), \qquad k \in \{0, \ldots, 3\}.$$

Nämä neljä pistettä on piirretty kuvassa 2. Huomaa, että mikään niistä ei ole reaaliakselilla: ei ole olemassa $r \in \mathbb{R}$, jolle pätee $r^4 = -1$! Koska $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ jne., ratkaisuilla on myös eksplisiittiset kaavat

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Kuva 2. Kaikki ratkaisut yhtälölle $w^4 = -1$.

Huomaa, että Määritelmässä 1.3.11 valitsimme yksikäsitteisen edustajan, pääargumentin $\mathrm{Arg}(z)$, moniarvoiselle argumentille $\arg(z)$. Samoin voimme valita tietyn yksikäsitteisen edustajan n:nnelle juurelle, valitsemalla $k = 0$ Lauseessa 1.4.4:

Määritelmä 1.4.7 (n:s pääjuuri). Olkoon $n \geq 2$. Määrittelemme $\mathbb{C}$-arvoisen funktion $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$\sqrt[n]{z} := \begin{cases} 0, & z = 0, \\ \sqrt[n]{|z|}(\cos(\mathrm{Arg}(z)/n) + i\sin(\mathrm{Arg}(z)/n)), & z \neq 0. \end{cases}$$

Funktiota $\sqrt[n]{\cdot}$ kutsutaan *n:nneksi pääjuureksi* (tai n:nnen juuren päähaaraksi). Kun $n = 2$, lyhennämme $\sqrt[2]{z} =: \sqrt{z}$.

Esimerkki 1.4.8. Esimerkin 1.4.6 mukaan luvun -1 4:nnen pääjuuren voi ilmaista seuraavasti:

$$\sqrt[4]{-1} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Huomautus 1.4.9. Jos $r \in \mathbb{R}$ ja $r \geq 0$, niin $\operatorname{Arg}(r) = 0$. Tämän vuoksi n:s pääjuuri $\sqrt[n]{r}$ yhtyy reaaliakselilta tuttuun määritelmään $\sqrt[n]{r}$.

Varoitus 1.4.10. Saatat muistaa säännön $\sqrt{rs} = \sqrt{r}\sqrt{s}$, joka pätee, kun $r, s \in [0, \infty)$. Pääneliöjuuri noudattaa tätä sääntöä myös, kun $r, s \in [0, \infty)$ (koska se vastaa tuttua neliöjuurta väleillä $[0, \infty)$), mutta se **ei päde** kaikilla kompleksiluvuilla:

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = e^{i\operatorname{Arg}(-1)/2}e^{i\operatorname{Arg}(-1)/2} = e^{i\pi/2}e^{i\pi/2} = e^{i\pi} = -1 \neq \sqrt{1}.$$

Huomautus 1.4.11. Muista, että Arg (pääargumentti) sisältää hypyn negatiivisella reaaliakselilla $(-\infty, 0)$. n:s pääjuuri $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ei siksi ole jatkuva joukossa $(-\infty, 0)$ jokaisella $n \geq 2$. Funktiot $\sqrt[n]{\cdot}$ ovat kuitenkin jatkuvia joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$.

1.5. Kompleksinen eksponentti

Tähän mennessä olemme määritelleet lausekkeet

$$z^n, \qquad \frac{1}{z}, \qquad \sqrt[n]{z}.$$

Seuraavaksi haluamme määritellä lisää funktioita, kuten

$$e^z, \qquad \sin z, \qquad \cos z, \qquad \log z, \qquad z^w$$

(monille) kompleksiluvuille z ja w.

1.5.1. Kompleksinen eksponentti. Tunnemme eksponenttifunktion e^x reaaliluvuille $x \in \mathbb{R}$. Sen Taylorin sarja on

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Korvaamme formaalisti x:n termillä iy, missä $y \in \mathbb{R}$. Kun muistetaan, että $i^2 = -1$ ja $i^{2k} = (-1)^k$ kaikilla $k \geq 1$, voidaan tehdä seuraava formaali lasku:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos y + i\sin y. \end{aligned}$$

Tämä antaa lisää perusteita sille, että Eulerin kaava $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ on järkevä määritelmä e^{iy}:lle, kun $y \in \mathbb{R}$. Jos uskotaan, että sääntö $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ toimii myös kompleksiluvuille, saamme seuraavan määritelmän.

MÄÄRITELMÄ 1.5.1 (Eksponenttifunktio). Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$, missä $x, y \in \mathbb{R}$. Määrittelemme

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

ESIMERKKI 1.5.2. $e^{4+i\pi/2} = e^4(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)) = e^4 i$.

Seuraava lause kokoaa kompleksisen eksponentin perusominaisuuksia.

PROPOSITIO 1.5.3 (Ominaisuudet e^z:lle).
(a) *Jos $z = x \in \mathbb{R}$, niin e^z on sama kuin tavallinen eksponenttifunktio e^x.*
(b) *Kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee*

$$e^{z+w} = e^z e^w,$$
$$(e^z)^{-1} = e^{-z}.$$

(c) *Jos $z = x + iy$, niin $|e^z| = e^x$. Erityisesti*

$$|e^{iy}| = 1, \qquad y \in \mathbb{R},$$

ja $e^z \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

TODISTUS. (a) Jos $z = x + iy$ ja $y = 0$, niin $e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$.
(b) Olkoon $z = x + iy$ ja $w = a + ib$. Kaavalla (1.4.1) saamme

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{x+a+i(y+b)} = e^{x+a}(\cos(y+b) + i \sin(y+b)) \\ &= e^x e^a (\cos y + i \sin y)(\cos b + i \sin b) = e^z e^w. \end{aligned}$$

Tämän nojalla saadaan $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$, mistä seuraa $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.
(c) Pätee $|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$. Tämä antaa $|e^{iy}| = 1$ ja $e^z \neq 0$ kaikilla z. □

HUOMAUTUS 1.5.4. Myöhemmin näytämme, että e^z on kompleksimuuttujan z analyyttinen funktio, ja seuraava tosiasia perustelee lisää Määritelmää 1.5.1: *kuvaus $z \mapsto e^z$ on ainoa analyyttinen funktio $\mathbb{C}$:ssä, joka yhtyy funktion $x \mapsto e^x$ kanssa $\mathbb{R}$:ssä.* Itse asiassa Kompleksianalyysi 2 -kurssilla näytetään, että jos kaksi analyyttistä funktiota $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yhtyvät $\mathbb{R}$:ssä, ne ovat samat kaikkialla.

Nyt kun olemme määritelleet lausekkeen $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ asianmukaisesti, voimme käyttää $e^{i\theta}$ -merkintää ja kirjoittaa uudelleen joitain aiemmin näkemiämme lauseita:

- (Polaarikoordinaatit) Mikä tahansa $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ voidaan kirjoittaa muodossa
$$z = |z|e^{i\theta}$$
missä $\theta \in \arg(z)$. Erityisesti voimme kirjoittaa
$$z = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)}.$$
- (Tulo) Jos $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, niin
$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$
- (Juuret) Jos $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ja $n \geq 2$, niin $z = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)}$:lla on pääjuuri
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}}.$$
Kaikki n:nnet juuret ovat muotoa
$$\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}}, \quad \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}+\frac{2\pi}{n})}, \quad \ldots \quad \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}+\frac{(n-1)2\pi}{n})}$$

HUOMAUTUS 1.5.5. Jos sinulla on vaikeuksia muistaa sinin ja kosinin summakaavoja, hyvä tapa muistaa ne on käyttää yhtälöä $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$:
$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}\\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

Seuraavaksi tutkimme kompleksisen eksponenttifunktion $z \mapsto e^z$ “kuvausominaisuuksia”. Tässä kaksi havainnollista ominaisuutta (katso Kuva 3):

PROPOSITIO 1.5.6. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Kompleksinen eksponenttifunktio kuvaa suoran $\{z : \operatorname{Im}(z) = a\}$ säteeksi $\{re^{ia} : r > 0\}$ ja suoran $\{z : \operatorname{Re}(z) = b\}$ ympyräksi, jonka säde on e^b.*

TODISTUS. Ensimmäinen väite seuraa suoraan kaavasta $e^{x+ia} = e^x e^{ia}$, ja huomataan, että e^x saa kaikki arvot välillä $(0, \infty)$, kun x vaihtelee $\mathbb{R}$:ssä.

Toinen väite seuraa kaavasta $|e^{b+iy}| \equiv e^b$, ja huomataan, että $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ saa kaikki arvot yksikköympyrällä, kun y vaihtelee $\mathbb{R}$:ssä. □

PROPOSITIO 1.5.7. *Kompleksinen eksponenttifunktio on $(2\pi i)$-periodinen:*
$$e^{z+2\pi i} = e^z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
Lisäksi,
$$e^z = e^w \quad \Longleftrightarrow \quad w = z + 2\pi ik \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}.$$

TODISTUS. $(2\pi i)$-periodisuus seuraa helposti:
$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z,$$

koska $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$. Oletetaan sitten, että $e^z = e^w$. Kertomalla e^{-z}:llä ja käyttämällä Lausetta 1.5.3 saadaan

$$e^{w-z} = 1.$$

Jos kirjoitamme $w - z = x + iy$, saadaan $1 = |e^{x+iy}| = e^x$, ja siksi $x = 0$. Seurauksena on

$$\cos y + i \sin y = e^{iy} = e^{w-z} = 1,$$

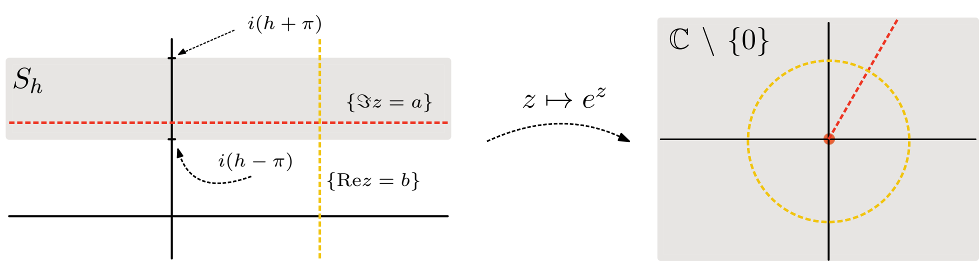
minkä nojalla $y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Tästä syystä $w - z = iy \in 2\pi i\mathbb{Z}$, kuten väitettiin. $\square$

$(2\pi i)$-periodisuuden perusteella kompleksinen eksponenttifunktio e^z saavuttaa kaikki arvonsa missä tahansa *suikaleessa* muotoa

$$S_h := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \in (h - \pi, h + \pi]\}, \qquad h \in \mathbb{R}, \tag{1.5.1}$$

katso Kuva 3. Toisin sanoen,

$$\{e^z : z \in \mathbb{C}\} = \{e^z : z \in S_h\} \text{ kaikilla } h \in \mathbb{R}.$$



Kuva 3. Kompleksisen eksponenttifunktion $z \mapsto e^z$ kuvausominaisuudet. Harmaa suikale S_h kuvautuu joukoksi $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Punainen suora $\{\mathrm{Im}(z) = a\}$ kuvautuu säteeksi $\{re^{ia} : r > 0\}$, joka lähtee pisteestä 0. Beige suora $\{\mathrm{Re}(z) = b\}$ kuvautuu ympyräksi, jonka säde on e^b.

Propositio 1.5.8. *Olkoon $h \in \mathbb{R}$. Kompleksinen eksponenttifunktio $z \mapsto e^z$ on bijektio $S_h \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Todistus. Näytetään ensin injektiivisyys. Olkoot $z_1, z_2 \in S_h$. Jos $e^{z_1} = e^{z_2}$, niin $e^{z_1 - z_2} = e^{z_1}/e^{z_2} = 1$, mikä Lauseen 1.5.7:n perusteella tarkoittaa, että $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Kuitenkin, valitsimme suikaleen S_h:n niin "kapeaksi", että tämä pakottaa $z_1 = z_2$.

Näytetään sitten surjektiivisuus: $\{e^z : z \in S_h\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Näimme jo, että $e^z \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Nyt jos $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin w:llä on polarikoordinaattiesitys

$$w = |w|e^{i\theta}, \qquad \theta \in \arg(w).$$

Lausekkeessa (1.3.2) osoitimme, että $\arg(w) = \mathrm{Arg}(w) + 2\pi\mathbb{Z}$. Erityisesti on olemassa $\theta \in \arg(w)$, jolle pätee $h < \theta \leq h + 2\pi$. Nyt

$$z := \log|w| + i\theta \in S_h,$$

ja $e^z = e^{\log|w|}e^{i\theta} = |w|e^{i\theta} = w$. (Tässä "log" viittaa luonnolliseen logaritmiin positiivisilla reaaliluvuilla.) □

1.5.2. Sin ja kosini-funktiot $\mathbb{C}$:ssä. Aiemmin (1.3.1):ssa huomasimme, että

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{ja} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Erityisesti

$$\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

kaikilla $\theta \in \mathbb{R}$. Nyt kun olemme määritelleet funktion e^z kaikilla $z \in \mathbb{C}$, yllä olevat kaavat antavan kätevän tavan laajentaa sini- ja kosinifunktiot koko kompleksitasoon:

Määritelmä 1.5.9 (Sini, kosini, tangentti). Jos $z \in \mathbb{C}$, määritellään

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.5.2}$$

Määrittelemme myös kompleksisen tangenttifunktion $\tan z := (\sin z)/(\cos z)$ aina kun $\cos z \neq 0$.

Monet tutut kosinin ja sinin ominaisuudet reaaliluvuilla saavat vastineensa $\mathbb{C}$:ssä:

Propositio 1.5.10. *Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Tällöin,*

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1, \quad \cos(2z) = (\cos z)^2 - (\sin z)^2, \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right) = \sin z.$$

Lisäksi seuraavat yhteenlaskusäännöt pätevät kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,$$
$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Mutta kaikki ei ole niin tuttua. Reaaliakselilla funktioiden sin ja cos arvot ovat aina välillä $[-1, 1]$. Tilanne on täysin erilainen $\mathbb{C}$:ssä:

Esimerkki 1.5.11. Sekä cos että sin ovat surjektiivisia kuvauksia $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (mutta eivät injektiivisiä). Erityisesti niiden modulit eivät ole rajoitettuja.

Ensimmäinen väite vaatii hieman vaivaa todistaa, ja jätämme sen tässä todistamatta, mutta toinen voidaan havaita helposti tarkastelemalla cos tai sin arvoja imaginaariakselilla:

$$\lim_{t\to\infty} \cos(it) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{iit} + e^{-iit}}{2} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \infty.$$

Vastaavasti $\sin(it) \to -\infty$ kun $t \to \infty$.

Sivuhuomautuksena voidaan mainita, että kuvaus $t \mapsto \cos(it)$ on reaaliarvoinen (kuten juuri näimme) ja tunnetaan nimellä *hyperbolinen kosini*. Samoin kuvaus $t \mapsto -i\sin(ix)$ on myös reaaliarvoinen ja tunnetaan nimellä *hyperbolinen sini*.

Esimerkki 1.5.12. Lähtien määritelmistä voidaan varsin helposti osoittaa, että kaikki yhtälön $\sin z = 0$ ratkaisut ovat reaaliakselilla, ja tiedämme, että $\sin x = 0$ kun $x \in \pi\mathbb{Z}$. Vastaavasti kaikki yhtälön $\cos z = 0$ ratkaisut ovat myös reaaliakselilla, tarkemmin sanottuna joukossa $\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$.

1.6. Kompleksinen logaritmi

Jos $x > 0$, logaritmi $\log x$ määritellään lukuna $t \in \mathbb{R}$, jolle pätee $e^t = x$. (Tällä kurssilla log tarkoittaa aina luonnollista logaritmia, jonka kantaluku on e.) Samoin haluaisimme määritellä lausekkeen $\log z$ kompleksilukuna w siten, että $e^w = z$. Kuten argumentin tapauksessa, tällainen logaritmi ei ole yksikäsitteinen, koska $z \mapsto e^z$ ei ole injektiivinen $\mathbb{C}$:ssä.

Jos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, käytämme polarikoordinaattiesitystä

$$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)} = e^{\log|z|}e^{i\mathrm{Arg}(z)} = e^{\log|z| + i\mathrm{Arg}(z)},$$

missä $\log|z|$ on positiivisen reaaliluvun $|z| > 0$ logaritmi. Siis $w_0 = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z) \in \mathbb{C}$ toteuttaa $e^{w_0} = z$. Koska e^w on $2\pi i$-periodinen, luvut $w_k = \log|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ toteuttavat myös yhtälön $e^{w_k} = z$, eikä muita ratkaisuja ole (tämä seuraa Lause 1.5.7:stä).

Määritelmä 1.6.1 (Logaritmi). Jos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sen (moniarvoinen) logaritmi on joukko

$$\log z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}.$$

Luvun z *päälogaritmi* on luku

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z).$$

Siis, kuten pääargumentti Arg tai pääjuuri $\sqrt[n]{\cdot}$, päälogaritmi $\mathrm{Log}\, z$ valitsee yhden tietyn edustajan monista z:n mahdollisista logaritmeista. Toki muita valintoja on mahdollista tehdä (esim. $\mathrm{Log}_1 z = \mathrm{Log}\, z + 2\pi i$). Selvyyden vuoksi huomautamme, että pätee

$$e^{\mathrm{Log}\, z} = z \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ja

$$\operatorname{Log} x = \log x \quad \text{kaikilla } x > 0.$$

Edellisestä tarkastelusta seuraa, että kun $z \neq 0$, niin

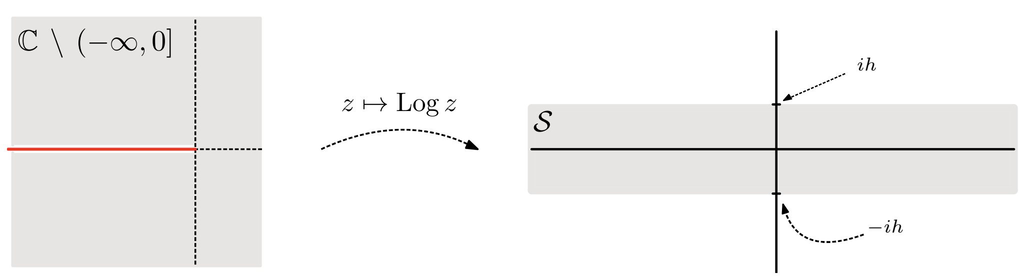
$$\log z = \{\operatorname{Log} z + 2\pi i k \, : \, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Huomaa, että luvun 0 logaritmi ei ole määritelty (kuten reaalilukujen tapauksessa), koska ei ole olemassa lukua $w \in \mathbb{C}$, jolle $e^w = 0$.

Päälogaritmin kuvausominaisuuksia havainnollistetaan Kuvassa 4, ja ne esitetään seuraavassa lauseessa.

Propositio 1.6.2. *Olkoon* $\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z)$ *päälogaritmi, määritelty joukossa* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. *Tällöin* Log *kuvaa joukon* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *bijektiivisesti avoimelle suikaleelle*

$$\mathcal{S} = \{z : \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}.$$



Kuva 4. Päälogaritmi Log kuvaa joukon $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ bijektiivisesti avoimelle suikaleelle $\mathcal{S}$.

Todistus. Helpoin tapa nähdä tämä on suoraan määritelmästä: kun $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ vaihtelee, $\log|z|$ saa kaikki mahdolliset arvot $\mathbb{R}$:ssä, ja $\operatorname{Arg}(z)$ saa kaikki arvot välillä $(-\pi, \pi)$. Siksi funktio Log kuvaa joukon $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ joukolle $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi) = \mathcal{S}$. Se, että $\operatorname{Log} \colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathcal{S}$ on bijektiivinen, on myös helppo nähdä määritelmästä. $\square$

Huomautus 1.6.3. Lauseen 1.6.2 perusteella kuvauksen $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathcal{S}$ käänteiskuvaus on $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $f(z) = e^z$.

Varoitus 1.6.4. Jos $s, t > 0$, reaaliakselin logaritmi toteuttaa ehdon $\log(st) = \log(s) + \log(t)$. Olemme aiemmin nähneet, että joskus $\operatorname{Arg}(zw) \neq \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$ ja $\sqrt{zw} \neq \sqrt{z}\sqrt{w}$, joten ei pitäisi olla yllätys, että joskus myös $\operatorname{Log}(zw) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$ (päälogaritmeilla). Jätämme konkreettisten esimerkkien löytämisen harjoitustehtäväksi.

Jos $z, w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, kompleksinen logaritmi toteuttaa kuitenkin seuraavan yhtälön joukkojen mielessä (harjoitustehtävä):

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w).$$

Tässä kirjoitamme $A + B = \{a + b \,:\, a \in A,\, b \in B\}$. Varoitamme lukijoita, että yleisesti ottaen tällaisten joukkoyhtälöiden kanssa tulee olla varovainen (esimerkiksi $\mathbb{Z} - \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, mikä saattaa ensin tuntua epäloogiselta).

1.6.1. Kompleksiset potenssit. Muistetaan, että jos $t > 0$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin määritellään

$$t^a := e^{a \log t}.$$

Voimme tehdä vastaavan määritelmän kompleksiluvuille, mutta joudumme jälleen ottamaan huomioon mahdollisesti moniarvoisen logaritmin. Käytämme päälogaritmia Log.

Määritelmä 1.6.5 (Kompleksisten potenssien päähaara). Jos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $w \in \mathbb{C}$, määritellään

$$z^w := e^{w \operatorname{Log} z}.$$

Esimerkki 1.6.6.

$$i^{2\pi} = e^{2\pi \operatorname{Log} i} = e^{2\pi \operatorname{Log}(e^{i\pi/2})} = e^{2\pi(i\pi/2)} = e^{i\pi^2} = \cos(\pi^2) + i\sin(\pi^2),$$

$$i^{2\pi i} = e^{2\pi i \operatorname{Log} i} = e^{2\pi i(i\pi/2)} = e^{-\pi^2}.$$

Voimme tarkistaa, että edellinen määritelmä vastaa jo tuntemiamme määritelmiä (alla z^w on kuten Määritelmässä 1.6.5):

- Jos $n \geq 1$ on kokonaisluku ja $z \neq 0$, niin Lauseen 1.5.3 perusteella

$$z^n = e^{n \operatorname{Log} z} = e^{\operatorname{Log} z} \cdot \ldots \cdot e^{\operatorname{Log} z} = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ kertaa}}$$

- Jos $n \geq 2$ on kokonaisluku ja $z \neq 0$, niin $\operatorname{Log} z$:n määritelmän ja Lauseen 1.5.3 perusteella näemme, että $z^{\frac{1}{n}}$ on n:s pääjuuri:

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Log} z} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i\operatorname{Arg}(z))} = e^{\frac{1}{n}\log|z|} e^{\frac{1}{n} i \operatorname{Arg}(z)} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}} = \sqrt[n]{z}$$

Kaikille $z \neq 0$ ja $w, v \in \mathbb{C}$ pätee myös tuttu sääntö

$$\begin{aligned} z^{w+v} &= e^{(w+v)\operatorname{Log} z} = e^{w \operatorname{Log} z + v \operatorname{Log} z} = e^{w \operatorname{Log} z} e^{v \operatorname{Log} z} \\ &= z^w z^v. \end{aligned}$$

Kuitenkin yleensä pätee

$$(zw)^v \neq z^v w^v, \qquad (z^w)^v \neq z^{wv}.$$

Varoitus 1.6.7. Yleisesti ottaen, ole erittäin varovainen laskettaessa kuvauksilla $z \mapsto \operatorname{Log} z$ tai $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ tai $z \mapsto z^w$, kun $z \in \mathbb{C}$ tai $w \in \mathbb{C}$, tai molemmat. Jotkut säännöt reaalisesta tapauksesta säilyvät voimassa, toiset eivät. Toisaalta kuvauksen $z \mapsto e^z$ ominaisuudet muistuttavat paljon kuvauksen $x \mapsto e^x$ ominaisuuksia. Tämä johtuu siitä, että määritelmässä e^z ei tehdä valintoja moniarvoisesta argumentista.

1.6.2. Luvun ?? yhteenveto. Tässä on luettelo joistakin keskeisistä aiheista.

- Kompleksitulon zw ja käänteisluvun z^{-1} määritelmä.
- Moduli, kompleksikonjugaatti, argumentti, ja miten nämä käsitteet liittyvät kompleksituloon ja käänteislukuun.
- De Moivren kaava.
- Luvun $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esitys napakoordinaateissa.
- Yhtälön $z^n = w$ ratkaisu ja pääjuuren $\sqrt[n]{w}$ määritelmä.
- Kompleksinen eksponentti ja sen perusominaisuudet.
- Kompleksinen (pää)logaritmi.

LUKU 2

Kompleksitason topologiaa

Tämän kurssin päääiheena ovat analyyttiset funktiot $f : U \to \mathbb{C}$, missä U on avoin osajoukko $\mathbb{C}$:ssä. Tällaisten funktioiden tutkimiseksi meidän on tiedettävä avoimista joukoista, jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta. Keräämme joitakin tarvittavia faktoja tässä luvussa.

Monet käsitteet saattavat olla lukijalle tuttuja aiemmista kursseista, kuten *Vektorianalyysi 1*. Erityisesti kaikki metriset ja topologiset käsitteet $\mathbb{C}$:ssä (avoimet ja suljetut joukot, etäisyys pisteiden välillä, raja-arvot, jatkuvuus) ovat **täsmälleen** samat kuin $\mathbb{R}^2$:ssa. Joten jos tunnet hyvin metriset ja topologiset käsitteet $\mathbb{R}^2$:ssa, voit vain silmäillä tätä lukua.

2.1. Avoimet ja suljetut joukot

MÄÄRITELMÄ 2.1.1 (Etäisyys). Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Pisteiden z ja w *etäisyys* on $|z - w|$, eli $z - w$:n itseisarvo. Koordinaateissa tämä on

$$|(a + ib) - (x + iy)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Tämä on sama luku kuin vektoreiden $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ välinen euklidinen etäisyys.

HUOMAUTUS 2.1.2. Seuraavat epäyhtälöt ovat hyödyllisiä: jos $z, w \in \mathbb{C}$, niin

$$||z| - |w|| \le |z + w| \le |z| + |w|.$$

Toinen epäyhtälö on *kolmioepäyhtälö* $|z + w| \le |z| + |w|$ Lauseesta 1.3.2. Ensimmäinen on *käänteinen kolmioepäyhtälö*, joka todistetaan seuraavasti:

$$|z| = |z - w + w| \le |z - w| + |w| \quad \Longrightarrow |z| - |w| \le |z - w|,$$

ja samoin

$$|w| = |w - z + z| \le |z - w| + |z| \quad \Longrightarrow \quad |w| - |z| \le |z - w|,$$

joten $||z| - |w|| \le |z - w|$.

MÄÄRITELMÄ 2.1.3 (Avoin ja suljettu kiekko, ympyrä). Olkoon $z \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$. Kirjoitamme

$$D(z, r) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}.$$

Tämä on *avoin kiekko, jonka keskipiste on* z *ja säde on* r. Joukko $\bar{D}(z,r) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| \leq r\}$ on *suljettu kiekko, jonka keskipisto on* z *ja säde* r. Viimeiseksi kirjoitamme

$$S(z,r) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| = r\}.$$

Tämä on *ympyrä, jonka keskipiste on* z *ja säde on* r. Pätee $S(z,r) = \bar{D}(z,r) \setminus D(z,r)$.

Määritelmä 2.1.4 (Sisäpiste, ulkopiste, reuna ja sulkeuma). Olkoon $A \subset \mathbb{C}$. Sanomme, että $z \in \mathbb{C}$ on

- *sisäpiste* joukolle A, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $D(z,r) \subset A$;
- *ulkopiste* joukolle A, jos z on sisäpiste joukolle $\mathbb{C} \setminus A$;
- *reunapiste* joukolle A, jos se ei ole joukon A sisä- eikä ulkopiste.

Sisäpisteiden, ulkopisteiden ja reunapisteiden joukkoja merkitään $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{ext}(A)$ ja ∂A (joukon A *sisus, ulkopuoli ja reuna*). Joukon A *sulkeuma* on

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Huomautus 2.1.5. Määritelmästä seuraa, että $z \in \partial A$ jos ja vain jos jokaiselle $r > 0$ pätee

$$A \cap D(z,r) \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad A \cap (\mathbb{C} \setminus D(z,r)) \neq \emptyset.$$

Jos $A \subset \mathbb{C}$ on mikä tahansa joukko, niin joukot $\mathrm{int}(A)$, ∂A ja $\mathrm{ext}(A)$ ovat erillisiä. Aina pätee

$$\mathbb{C} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A \cup \mathrm{ext}(A).$$

Määritelmä 2.1.6 (Avoin ja suljettu joukko). Joukko $U \subset \mathbb{C}$ on *avoin*, jos jokainen $z \in U$ on joukon U sisäpiste, eli $U = \mathrm{int}(U)$. Joukko $F \subset \mathbb{C}$ on *suljettu*, jos joukko $\mathbb{C} \setminus F$ on avoin.

Esimerkki 2.1.7. Avoin kiekko $D(z,r)$ on avoin, ja suljettu kiekko $\bar{D}(z,r)$ on suljettu. Osoittaaksesi, että $D(z,r)$ on avoin, sinun on näytettävä, että jos $w \in D(z,r)$, niin on olemassa $s > 0$ siten, että $D(w,s) \subset D(z,r)$. Miksi tämä on totta? Osoittaaksesi, että $\bar{D}(z,r)$ on suljettu, sinun on näytettävä, että $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(z,r)$ on avoin. Miksi tämä on totta? Pätee (harjoitus)

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(D(z,r)) &= D(z,r), \\ \partial D(z,r) &= S(z,r), \\ \overline{D(z,r)} &= \bar{D}(z,r). \end{aligned}$$

Esimerkki 2.1.8. Jos $A \subset \mathbb{C}$ on mikä tahansa joukko, niin joukot $\mathrm{int}(A)$ ja $\mathrm{ext}(A)$ ovat avoimia, ja joukot ∂A ja $\overline{A}$ ovat suljettuja (harjoitus).

Esimerkki 2.1.9. Joukot $\emptyset$ ja $\mathbb{C}$ ovat molemmat avoimia ja suljettuja. Nämä ovat ainoat $\mathbb{C}$:n osajoukot, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja. (Tämä liittyy myöhemmin käsiteltävään *yhtenäisyyden* käsitteeseen.)

Varoitus 2.1.10. Monet joukot eivät ole avoimia eivätkä suljettuja. Esimerkiksi $D(0,1) \cup \{2\}$ (avoimen kiekon ja yhden pisteen yhdiste) ei ole avoin eikä suljettu.

Seuraavaksi tarkastelemme avoimien ja suljettujen joukkojen yhdistettä ja leikkausta.

Propositio 2.1.11. *Olkoon $U_j \subset \mathbb{C}$, $j \in \mathcal{J}$, **mielivaltainen** (mahdollisesti ääretön) kokoelma avoimia joukkoja. Silloin yhdiste $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} U_j$ on myös avoin.*

*Olkoon $V_1, \ldots, V_n \subset \mathbb{C}$ **äärellinen** perhe avoimia joukkoja. Silloin $V_1 \cap \ldots \cap V_n$ on avoin.*

Todistus. Näytetään ensin, että yhdiste $U = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} U_j$ on avoin. Valitaan $z \in U$. Silloin erityisesti $z \in U_j$ jollekin $j \in \mathcal{J}$. Koska U_j on avoin, on olemassa säde $r > 0$ siten, että $D(z,r) \subset U_j$. Mutta nyt myös $D(z,r) \subset U$. Olemme osoittaneet, että U on avoin.

Näytetään sitten, että leikkaus $V := V_1 \cap \ldots \cap V_n$ on avoin. Valitaan $z \in V$. Silloin $z \in V_j$ kaikilla $1 \leq j \leq n$, joten jokaiselle näistä indekseistä on olemassa säde $r_j > 0$ siten, että $D(z,r_j) \subset V_j$. Näin ollen, asettamalla $r := \min r_j$, pätee $r > 0$ ja

$$D(z,r) \subset D(z,r_1) \cap \ldots \cap D(z,r_n) \subset V_1 \cap \ldots V_n = V.$$

Tämä osoittaa, että V on avoin. Perheen $V_1, \ldots, V_n$ äärellisyytta tarvittiin varmistamaan, että minimi $r = \min r_j$ pysyy (aidosti) positiivisena. □

Suljetuilla joukoilla on täysin päinvastainen käyttäytyminen:

Korollaari 2.1.12. *Olkoon $F_j \subset \mathbb{C}$, $j \in \mathcal{J}$, **mielivaltainen** (mahdollisesti ääretön) kokoelma suljettuja joukkoja. Silloin leikkaus $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} F_j$ on myös suljettu.*

*Olkoon $C_1, \ldots, C_n \subset \mathbb{C}$ **äärellinen** perhe suljettuja joukkoja. Silloin $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ on suljettu.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

2.2. Jonot ja raja-arvot

Määritelmä 2.2.1 (Jonon raja-arvo). Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ kompleksilukujono. Sanomme, että $z \in \mathbb{C}$ on jonon (z_n) *raja-arvo*, merkitään $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa indeksi $n_0 \in \mathbb{N}$, joka riippuu ϵ:sta, siten että

$$|z_n - z| < \epsilon \text{ kaikilla } n \geq n_0.$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $z_n \in D(z,\epsilon)\quad$ kaikilla $n \geq n_0$. Tässä tapauksessa sanomme, että (z_n) *suppenee* kohti lukua z, ja merkitsemme $z_n \to z$ kun $n \to \infty$.

Huomautus 2.2.2. Jonolla voi olla korkeintaan yksi raja-arvo: jos $z_n \to z$ ja $z_n \to w$ jollakin $z \neq w$, niin ottamalla $\epsilon = |z-w|/2 > 0$ seuraisi, että $z_n \in D(z,\epsilon)$ ja $z_n \in D(w,\epsilon)$ kaikilla riittävän suurilla n, mikä on mahdotonta. Monilla jonoilla ei ole mitään raja-arvoa, esimerkiksi $z_n = n$ tai $z_n = (-1)^n$.

Propositio 2.2.3. *Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ kompleksilukujono ja $z \in \mathbb{C}$. Tällöin $z_n \to z$ jos ja vain jos*

$$\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z) \quad \textit{ja} \quad \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z).$$

Todistus. Kirjoitetaan $z_n = x_n + iy_n$ ja $z = x + iy$, missä $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$, $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$, ja niin edelleen. Sitten huomataan, että kolmioepäyhtälön perusteella

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Tästä nähdään, että ehdot $|z_n - z| \to 0$ ja $|x_n - x| + |y_n - y| \to 0$ ovat ekvivalentit. $\square$

Näytämme seuraavaksi, että joukko on suljettu tarkalleen silloin, kun se sisältää kaikkien suppenevien jonojensa raja-arvot.

Propositio 2.2.4. *Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on suljettu jos ja vain jos jokaiselle joukon $(z_n) \subset A$ suppenevalle jonolle pätee* $\lim_{n \to \infty} z_n \in A$.

Todistus. "$\Longrightarrow$" Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ suljettu ja $(z_n) \subset A$ sellainen jono, joka suppenee johonkin pisteeseen $z \in \mathbb{C}$. Tehdään vastaoletus, että $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Koska A on suljettu, $\mathbb{C} \setminus A$ on avoin, joten on olemassa pallo $B(z,r) \subset \mathbb{C} \setminus A$. Koska kuitenkin $z_n \to z$, olisi $z_n \in B(z,r)$ riittävän suurilla n, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $(z_n) \subset A$.

"$\Longleftarrow$" Oletetaan, että jokaiselle joukon $(z_n) \subset A$ suppenevalle jonolle pätee, että sen raja-arvo z kuuluu joukkoon A. Täytyy näyttää, että A on suljettu, mikä on sama asia kuin näyttää, että $\mathbb{C} \setminus A$ on avoin. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $z \in \mathbb{C} \setminus A$ siten, että jokaisella $n \geq 1$ on piste $z_n \in D(z, 1/n) \cap A$. Tämä johtaa ristiriitaan. $\square$

Seuraavat tulokset liittyvät erittäin tärkeään *kompaktisuuden* käsitteeseen. Annamme seuraavaksi ne kompaktisuuteen liittyvät ominaisuudet, jotka tarvitaan myöhemmin Cauchyn lauseen ja sen sovellusten todistuksissa.

Määritelmä 2.2.5 (Rajoittuneisuus ja kompaktisuus). Sanomme, että jono $(z_n) \subset \mathbb{C}$ on *rajoitettu*, jos on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|z_n| \leq M \qquad \text{kaikilla } n.$$

Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *rajoitettu*, jos on olemassa $M > 0$ siten, että $|z| \leq M$ kaikilla $z \in A$. Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *kompakti*, jos se on suljettu ja rajoitettu.

On monia ekvivalentteja tapoja määritellä kompakti joukko, mutta yllä oleva määritelmä toimii kompleksitasossa. Seuraavaksi muotoilemme tärkeän Bolzano-Weierstrassin lauseen kurssilta *Vektorianalyysi 1*. Lause sanoo, että millä tahansa avaruuden $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.

LAUSE 2.2.6 (Bolzano-Weierstrass). *Jos $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ on rajoitettu jono, on olemassa osajono $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ siten, että $z_{n_k} \to z$ jollekin $z \in \mathbb{C}$.*

Bolzano-Weierstrassin lause johtaa toiseen ekvivalenttiin kompaktin joukon määritelmään.

PROPOSITIO 2.2.7 (Jonokompaktisuus). *Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on kompakti jos ja vain jos millä tahansa jonolla $(z_n) \subset A$ on osajono, joka suppenee johonkin joukon A pisteeseen.*

TODISTUS. "$\Longrightarrow$" Oletetaan, että A on kompakti ja $(z_n) \subset A$. Koska A on rajoitettu, Bolzano-Weierstrassin lauseen perusteella on olemassa osajono (z_{n_k}) siten, että $z_{n_k} \to z$ jollekin $z \in \mathbb{C}$. Koska A on myös suljettu, Lause 2.2.4 näyttää, että $z \in A$.

"$\Longleftarrow$" Oletetaan, että $A \subset \mathbb{C}$ on sellainen joukko, että millä tahansa jonolla $(z_n) \subset A$ on osajono, joka suppenee johonkin joukon A pisteeseen. Jos nyt $(z_n) \subset A$ suppenee johonkin pisteeseen $z \in \mathbb{C}$, oletuksen nojalla jollakin osajonolla (z_{n_k}) täytyy olla raja-arvo $w \in A$. Koska (z_{n_k}) suppenee myös alkuperäiseen raja-arvoon z, on pakko olla $z = w \in A$ Huomautuksen 2.2.2:n perusteella. Lause 2.2.4 osoittaa sitten, että A on suljettu.

Näyttääksemme, että A on rajoitettu, teemme vastaoletuksen ja oletamme, että jokaiselle n on olemassa $z_n \in A$ siten, että $|z_n| > n$. Oletuksen perusteella löytyy suppeneva osajono (z_{n_k}). Jokainen suppeneva osajono on rajoitettu (miksi?). Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $|z_{n_k}| > n_k$ missä $n_k \to \infty$. □

Cauchyn lauseen todistus perustuu seuraavaan Bolzano-Weierstrassin seuraukseen.

LAUSE 2.2.8 (Cantorin leikkausteoreema). *Olkoon $K_1, K_2, K_3, \ldots$ suljettuja ja epätyhjiä osajoukkoja kompleksitasossa $\mathbb{C}$ siten, että K_1 on kompakti ja*

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots .$$

Tällöin

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

TODISTUS. Koska joukot K_n eivät ole tyhjiä, voimme valita jonkin pisteen $z_n \in K_n$ jokaiselle n:lle. Joukot K_j ovat sisäkkäisiä, mistä seuraa, että

$(z_n) \subset K_1$. Joukko K_1 oli kompakti, joten Lause 2.2.7 takaa, että on olemassa osajono $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, joka suppenee pisteeseen $z \in K_1$.

Nyt jokaiselle $m \geq 1$ jono $(z_{n_k})_{k \geq m}$ sisältyy joukkoon K_m ja se suppenee myös pisteeseen z. Koska K_m oli suljettu, Lause 2.2.4 antaa, että raja-arvo z on myös joukossa K_m. Tämä pätee kaikille $m \geq 1$, joten on oltava $z \in \cap_{m=1}^{\infty} K_m$. □

2.3. Jatkuvuus

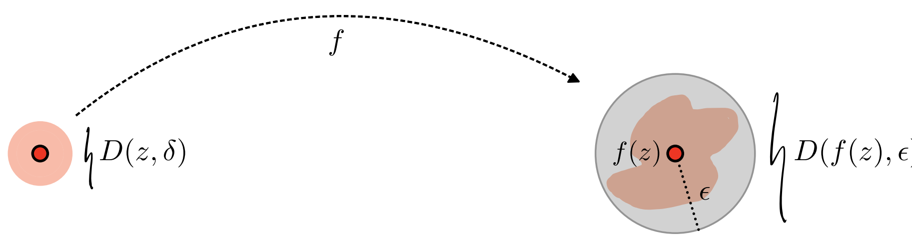
Seuraavaksi käsittelemme jatkuvuutta funktioille $f : X \to \mathbb{C}$, kun $X \subset \mathbb{C}$.

MÄÄRITELMÄ 2.3.1 (Jatkuvuus). Olkoon $X \subset \mathbb{C}$ joukko ja $f \colon X \to \mathbb{C}$ kuvaus. Sanomme, että f on *jatkuva pisteessä* $z \in X$, jos jokaiselle $\epsilon > 0$:lle on olemassa $\delta = \delta(\varepsilon, z) > 0$ siten, että

$$|f(w) - f(z)| < \epsilon \text{ kaikilla } w \in X \text{ kun } |w - z| < \delta.$$

Ylläoleva ehto voidaan kirjoittaa myös muodossa $f(D(z, \delta) \cap X) \subset D(f(z), \epsilon)$.

Jos $A \subset X$, ja f on jatkuva jokaisessa pisteessä $z \in A$, sanomme, että f on *jatkuva joukossa* A.



KUVA 1. Funktion f jatkuvuus pisteessä $z \in X$.

VAROITUS 2.3.2. Funktion $f \colon X \to \mathbb{C}$ jatkuvuus pisteessä $z \in X$ (tai joukossa $A \subset X$) riippuu vahvasti määrittelyjoukosta "X". Esimerkiksi $\mathrm{Arg} \colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ (pääargumentin rajoittuma negatiivisille reaaliluvuille) on vakiofunktio ja siten jatkuva $(-\infty, 0)$:ssa. Kuitenkin $\mathrm{Arg} \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ei ole jatkuva missään $(-\infty, 0)$:n pisteessä.

Toisin sanoen on mahdollista, että $f \colon A \to \mathbb{C}$ on jatkuva joukossa A, mutta $f \colon X \to \mathbb{C}$ ei ole jatkuva missään A:n pisteessä. Ylläolevassa esimerkissä $f = \mathrm{Arg}$ ja $A = (-\infty, 0)$.

Funktion f jatkuvuus pisteessä $z \in X$ on kuvattu Kuvassa 1. Seuraava lause kertoo, että jatkuvuus voidaan ilmaista näppärästi jonojen avulla.

LAUSE 2.3.3 (Jatkuvuus jonojen avulla). *Olkoon $X \subset \mathbb{C}$ joukko ja $f\colon X \to \mathbb{C}$ kuvaus. Tällöin f on jatkuva pisteessä $z \in X$ jos ja vain jos jokaiselle jonolle $(z_n) \subset X$, jolle $z_n \to z$, pätee myös $f(z_n) \to f(z)$.*

LAUSEEN 2.3.3 TODISTUS. "$\Longrightarrow$" Oletetaan ensin, että f on jatkuva pisteessä $z \in X$. Valitaan jokin jono $(z_n) \subset X$ niin, että $z_n \to z$. Meidän tulee osoittaa, että $f(z_n) \to f(z)$. Määritelmän 2.2.1 mukaan tämä tarkoittaa, että jokaiselle $\epsilon > 0$ on oltava olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$f(z_n) \in D(f(z), \epsilon) \quad \text{kaikilla} \quad n \geq n_0. \tag{2.3.1}$$

Tätä varten kiinnitetään $\epsilon > 0$. Nyt jatkuvuusoletuksen perusteella on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(D(z, \delta) \cap X) \subset D(f(z), \epsilon). \tag{2.3.2}$$

Toisaalta, koska $(z_n) \subset X$ ja $z_n \to z$, on olemassa indeksi $n_0 \in \mathbb{N}$ siten että $z_n \in D(z, \delta) \cap X$ kaikilla $n \geq n_0$. Täten, kun $n \geq n_0$, pätee

$$f(z_n) \in f(D(z, \delta) \cap X) \overset{(2.3.2)}{\subset} D(f(z), \epsilon).$$

Tämä tarkoittaa, että (2.3.1) on voimassa kaikilla $n \geq n_0$. Tämä oli tavoitteemme.

"$\Longleftarrow$" Oletetaan sitten, että aina kun $(z_n) \subset X$ ja $z_n \to z$, niin $f(z_n) \to f(z)$. Väitämme, että f on jatkuva pisteessä z. Tämän todistamiseksi tulee kiinnittää $\epsilon > 0$ ja näyttää, että jos $\delta > 0$ on tarpeeksi pieni, riippuen vain ϵ:sta ja z:sta, niin inkluusio (2.3.2) pätee. Tehdään vastaoletus, että millekään valinnalle $\delta = 1/n$ tällainen δ ei toimi, kun $n \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen

$$f(D(z, \tfrac{1}{n}) \cap X) \not\subset D(f(z), \epsilon), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Toisin sanoen jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ voimme löytää pisteen $z_n \in D(z, \frac{1}{n}) \cap X$ siten, että $|f(z_n) - f(z)| \geq \epsilon$. Nyt (z_n) on selvästi jono pisteitä joukossa X ja $z_n \to z$. Kuitenkaan ei voi olla, että $f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$, koska $|f(z_n) - f(z)| \geq \epsilon$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa ja päättää todistuksen. □

Seuraava lause on analoginen Lauseen 2.2.3 kanssa:

PROPOSITIO 2.3.4. *Olkoon $X \subset \mathbb{C}$ joukko ja $f\colon X \to \mathbb{C}$ funktio. Tällöin f on jatkuva pisteessä $z \in X$ jos ja vain jos reaalilukuarvoiset funktiot*

$$\mathrm{Re}(f)\colon X \to \mathbb{R} \quad \textit{ja} \quad \mathrm{Im}(f)\colon X \to \mathbb{R}$$

ovat jatkuvia pisteessä z. Nämä funktiot määritellään kaavoilla $(\mathrm{Re}(f))(w) := \mathrm{Re}(f(w))$ ja $(\mathrm{Im}(f))(w) := \mathrm{Im}(f(w))$ kaikilla $w \in X$.

TODISTUS. Tämä voidaan päätellä Lauseesta 2.2.3 käyttämällä Lausetta 2.3.3. Jätämme yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. □

Jos olet jo löytänyt muutamia jatkuvia funktioita, voit luoda lisää jatkuvia funktioita seuraavilla operaatioilla:

PROPOSITIO 2.3.5. *Oletetaan, että $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia pisteessä $z \in X$, ja $h\colon g(X) \to \mathbb{C}$ on jatkuva pisteessä $g(z) \in g(X)$. Tällöin seuraavat funktiot ovat jatkuvia pisteessä $z \in X$:*

$$f + g\colon X \to \mathbb{C}, \quad fg\colon X \to \mathbb{C}, \quad \text{ja} \quad h \circ g\colon X \to \mathbb{C}.$$

Tässä $(fg)(w) = f(w)g(w)$ on funktioiden f ja g (kompleksi)tulo, ja $(h \circ g)(w) = h(g(w))$ on funktioiden h ja g yhdiste.

Lisäksi, jos lisätään edellisiin oletuksiin, että $g(z) \neq 0$, niin f/g on jatkuva pisteessä $z \in X$, missä $(f/g)(w) := f(w)(g(w))^{-1}$.

TODISTUS. Tämä todistus on lähes sama kuin todistus samankaltaisesta tuloksesta reaaliarvoisille funktioille $\mathbb{R}$:ssä, joten jätämme yksityiskohdat vapaaehtoiseksi harjoitukseksi. On huomattava, että $(f/g)(w)$ on määritelty vain niille $w \in X$, joilla $g(w) \neq 0$. Kuitenkin, jos g on jatkuva pisteessä z ja $g(z) \neq 0$, pätee $g(w) \neq 0$ joukossa $D(z, \epsilon) \cap X$ jollakin $\epsilon > 0$. Siksi f/g on määritelty ainakin joukossa $D(z, \epsilon) \cap X$ ja jatkuva pisteessä z. □

KOROLLAARI 2.3.6. *Olkoon $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Silloin polynomi*

$$z \mapsto p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

on jatkuva $\mathbb{C}$:ssä.

TODISTUS. Funktio p voidaan kirjoittaa summana (kompleksisten) jatkuvien funktioiden tuloista. Näin ollen tulos seuraa Lauseesta 2.3.5. □

PROPOSITIO 2.3.7. *Tässä muutamia muita tärkeitä jatkuvia funktioita:*
(1) *Funktiot $z \mapsto \bar{z}$ ja $z \mapsto |z|$ ovat jatkuvia $\mathbb{C}$:ssä.*
(2) *Funktio $z \mapsto z^{-1}$ on jatkuva $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:ssa.*
(3) *Funktio $z \mapsto \operatorname{Arg}(z)$ on jatkuva $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:ssa.*
(4) *Jos $n \geq 2$, funktio $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ on jatkuva $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$:ssa.*
(5) *Funktiot $e^z, \sin z, \cos z$ ovat jatkuvia $\mathbb{C}$:ssä.*
(6) *Funktio $\operatorname{Log} z$ on jatkuva $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:ssa.*

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

Seuraavaksi käsittelemme jatkuvien funktioiden kuvajoukkoja. Jos $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva ja A on suljettu tai rajoitettu, niin $f(A)$ ei ole **välttämättä** suljettu tai rajoitettu. Esimerkkejä ovat

- $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = e^z$, missä $\mathbb{C}$ on suljettu, mutta $f_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ei ole suljettu; tai
- $f_2 : D(0, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f_2(z) = z^{-1}$, missä $D(0, 1) \setminus \{0\}$ on rajoitettu, mutta $f_2(D(0, 1) \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, 1)$ ei ole rajoitettu.

Kuitenkin, jos A on *kompakti*, niin myös $f(A)$ on kompakti.

PROPOSITIO 2.3.8. *Jos $A \subset \mathbb{C}$ on kompakti ja $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva, niin $f(A)$ on kompakti.*

TODISTUS. Käytämme Lausetta 2.2.7. Olkoon (w_n) jono joukossa $f(A)$. Tällöin jokaiselle n:lle pätee $w_n = f(z_n)$ jollekin $z_n \in A$. Koska A on kompakti, Lause 2.2.7 osoittaa, että löytyy osajono (z_{n_k}), joka suppenee johonkin $z \in A$. Lauseen 2.3.3 mukaan jono $f(z_{n_k})$ suppenee pisteeseen $f(z) \in f(A)$. Tämä osoittaa, että mikä tahansa jono $(w_n) \subset f(A)$ sisältää osajonon, joka suppenee joukon $f(A)$ pisteeseen. Lauseen 2.2.7 perusteella $f(A)$ on kompakti. $\square$

Koska kompaktit joukot ovat rajoitettuja, saadaan seuraus, jota käytetään myöhemmin algebran peruslauseen todistuksessa (Liouvillen lauseen kautta):

KOROLLAARI 2.3.9. *Jos $A \subset \mathbb{C}$ on kompakti ja $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva, niin on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in A$.*

Myöhemmin tarvitaan myös seuraava hieman vahvempi muoto.

KOROLLAARI 2.3.10. *Jos $A \subset \mathbb{C}$ on kompakti ja $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva, niin on olemassa $z_0 \in A$ siten, että $\max_{z \in A} |f(z)| = |f(z_0)|$.*

TODISTUS. Funktio $g(z) = |f(z)|$ on jatkuva joukossa A, joten $g(A)$ on joukon $\mathbb{R}$ kompakti osajoukko. Erityisesti $g(A)$ on rajoitettu, joten $m = \sup g(A) < \infty$. Koska $g(A)$ on myös suljettu, Proposition 2.2.4 nojalla pätee $m \in g(A)$, joten jollekin $z_0 \in A$ pätee $m = g(z_0) = |f(z_0)|$. $\square$

2.4. Yhtenäiset joukot ja alueet

Tämän kurssin aikana käydään läpi kaksi tärkeää analyyttisten funktioiden tulosta, jotka edellyttävät *yhtenäisen joukon* käsitettä:

- Jos $f : U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, jolle $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in U$, ja $U \subset \mathbb{C}$ on avoin ja yhtenäinen, niin f on vakio joukossa U.
- (Maksimimoduliperiaate) Jos $f : U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio ja $U \subset \mathbb{C}$ on avoin ja yhtenäinen, ja jos $|f(z_0)| = \max_{z \in U} |f(z)|$ jollakin $z_0 \in U$, niin f on vakio joukossa U.

Seuraava on yleinen tapa määritellä yhtenäisyys: joukkoa $X \subset \mathbb{C}$ kutsutaan **yhtenäiseksi**, jos sitä ei voida jakaa kahteen osaan muodossa

$$X = (X \cap U) \cup (X \cap V), \tag{2.4.1}$$

missä $U, V \subset \mathbb{C}$ ovat avoimia, erillisiä ja $X \cap U \neq \emptyset \neq X \cap V$. Jos X itsessään on avoin, tämä yleinen määritelmä osoittautuu yhtäpitäväksi toisen (intuitiivisemman?) käsitteen kanssa, jota kutsutaan *polkuyhtenäisyydeksi*.

Näissä luennoissa meidän tarvitsee käsitellä vain avoimia yhdistettyjä joukkoja, joten käytämmä polkuyhtenäisyyttä päämääritelmänä.

Jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, kutsumme jatkuvaa kuvausta $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *poluksi.*

MÄÄRITELMÄ 2.4.1 (Yhtenäinen joukko). Oletetaan, että $U \subset \mathbb{C}$ on avoin. Silloin sanomme, että U on *yhtenäinen* jos jokaiselle $z, w \in U$ on olemassa polku $\gamma\colon [0,1] \to U$ siten, että

$$\gamma(0) = z \quad \text{ja} \quad \gamma(1) = w.$$

Toisin sanoen jokainen pistepari $z, w \in U$ voidaan *yhdistää* polulla joukossa U.

Intuitiivisesti joukko on yhtenäinen, jos sitä ei voida jakaa kahteen erilliseen osaan. Tätä havainnollistetaan seuraavilla esimerkeillä.

ESIMERKKI 2.4.2. Joukot $\mathbb{C}$, $D(z,r)$ ja $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ovat yhtenäisiä (miksi)? Joukot $D(-2,1) \cup D(2,1)$ tai $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eivät ole yhtenäisiä (osoittaaksesi tämän, käytä polkua $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, joka yhdistäisi kaksi eri “komponentissa”olevaa pistettä, ja johda ristiriita käyttäen väliarvolausetta funktiolle $x(t)$).

HUOMAUTUS 2.4.3. Avointa ja yhtenäistä joukkoa kutsutaan usein *alueeksi.* Joten, Määritelmä 2.4.1 on itse asiassa alueen määritelmä.

TEHTÄVÄ 2.1. Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ on avoin ja yhtenäinen yhtälön (2.4.1) mielessä. Näytä, että U on polkuyhtenäinen eli yhtenäinen Määritelmän 2.4.1 mukaisesti.

“Topologin sinikäyrä” (voit katsoa esim. Wikipediasta) on suljettu joukko, joka on yhtenäinen muttei polkuyhtenäinen.

Seuraava lause tulee olemaan hyödyllinen myöhemmin.

PROPOSITIO 2.4.4. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja yhtenäinen. Olkoon $f : U \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on* lokaalisti vakio*: jokaiselle $z \in U$ on olemassa $r > 0$ siten, että f on vakio jokossa $D(z,r)$. Tällöin f on vakio koko joukossa U.*

TODISTUS. Valitaan $z \in U$. Väitämme, että $f(w) = f(z)$ kaikilla $w \in U$. Valitaan $w \in U$. Koska U on yhtenäinen, on olemassa polku $\gamma\colon [0,1] \to U$ siten, että $\gamma(0) = z$ ja $\gamma(1) = w$. Tällöin $f \circ \gamma\colon [0,1] \to U$ on lokaalisti vakio. Erityisesti, jos $u = \mathrm{Re}(f)$, funktio $u(\gamma(t))$ on jatkuva $[0,1] \to \mathbb{R}$ ja lokaalisti vakio. Seuraa, että $u(\gamma(t))$ on vakio välillä $[0,1]$ (harjoitustehtävä). Samoin, jos $v = \mathrm{Im}(f)$, niin $v(\gamma(t))$ on vakio. Näin ollen $f(w) = (f \circ \gamma)(1) = (f \circ \gamma)(0) = f(z)$, kuten väitettiin. $\square$

2.4.1. Yhteenveto Luvusta 2. Tässä on luettelo tämän luvun keskeisistä aiheista:

- Etäisyys, avoimet ja suljetut kiekot.
- Avoimet ja suljetut joukot, niiden yhdisteet ja leikkaukset.
- Jonon raja-arvot.
- Kompaktit joukot, Bolzano–Weierstrassin lause ja Cantorin leikkauslause.
- Funktioiden jatkuvuus, jatkuvuuden määritteleminen jonojen avulla (Lause 2.3.3).
- Uusien jatkuvien funktioiden tuottaminen olemassa olevista (summa, tulo, käänteisfunktio ja yhdistetty funktio).
- Jatkuva funktio kompaktissa joukossa on rajoitettu.
- Yhtenäiset avoimet joukot (tunnetaan myös nimellä alueet).

LUKU 3

Analyyttiset funktiot

Kurssi tähän asti on ollut valmistautumista *analyyttisten funktioiden* teoriaan ($\mathbb{C}$:n avoimilla osajoukoilla). Kirjallisuudessa analyyttisiä funktioita kutsutaan usein *holomorfisiksi*, mutta Suomessa puhutaan yleensä analyyttisistä funktioista ja noudatamme tätä perinnettä.

Olemme jo nähneet joitakin analyyttisiä funktioita, esimerkiksi

$$z^n, \qquad \sqrt[n]{z}, \qquad e^z, \qquad \sin z, \qquad \operatorname{Log} z, \qquad \ldots$$

Funktion f analyyttisyys voidaan määritellä monin tavoin, esim. seuraavilla yhtäpitävillä ehdoilla:

- f:llä on kompleksinen derivaatta.
- $f = u + iv$ toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.
- f ratkaisee yhtälön $\overline{\partial} f = 0$.
- f voidaan kirjoittaa suppenevana potenssisarjana $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
- f on *konforminen*, eli se säilyttää (infinitesimaalisesti) kulmat ja orientaatiot.

Ensimmäiset kolme ehtoa käsitellään tarkemmin tässä luvussa. Viimeiset kaksi ehtoa esiintyvät kurssilla *Kompleksianalyysi 2*.

3.1. Kompleksinen derivaatta

MÄÄRITELMÄ 3.1.1 (Kompleksinen derivaatta). Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $z \in U$. Funktio $f\colon U \to \mathbb{C}$ on *kompleksisesti derivoituva pisteessä* z, jos raja-arvo

$$\lim_{\substack{w \to z \\ w \in U \setminus \{z\}}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \tag{3.1.1}$$

olemassa. Tässä tapauksessa merkitsemme

$$f'(z) := \lim_{\substack{w \to z \\ w \in U \setminus \{z\}}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Tätä kompleksilukua kutsutaan *f:n kompleksiseksi derivaataksi pisteessä z.*

HUOMAUTUS 3.1.2. Raja-arvo

$$\lim_{\substack{w \to z \\ w \in U \setminus \{z\}}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z)$$

tarkoittaa, että **mikä tahansa** jono $(w_n) \subset U \setminus \{z\}$, $\frac{f(w_n)-f(z)}{w_n - z}$ suppenee kohti lukua $f'(z)$. Jatkossa lyhennämme

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} := \lim_{\substack{w \to z \\ w \in U \setminus \{z\}}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

HUOMAUTUS 3.1.3. Tällä kurssilla puhumme pääasiassa **kompleksisesti** derivoituvista funktioista ja niiden **kompleksisista** derivaatoista. Siksi lyhennämme terminologiaamme jatkossa ja puhumme yksinkertaisesti derivoituvista funktioista ja niiden derivaatoista. On kuitenkin todellinen sekaannuksen vaara. Saatat tuntea vektoriarvoisten funktioiden $f = (u, v)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (kokonais)derivaatan $Df(z)$ käsitteen. Tämä on matriisi

$$Df(z) = \begin{bmatrix} \partial_1 u(z) & \partial_2 u(z) \\ \partial_1 v(z) & \partial_2 v(z) \end{bmatrix}.$$

Ensi vilkaisulla tällä käsitteellä ei näytä olevan mitään tekemistä kompleksisen derivaatan $f'(z)$ kanssa! Itse asiassa sillä on paljon tekemistä $f'(z)$:n kanssa, ja tämä yhteys selitetään luvussa 3.2.

MÄÄRITELMÄ 3.1.4 (Analyyttinen funktio). Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f\colon U \to \mathbb{C}$ funktio, joka on kompleksisesti derivoituva jokaisessa pisteessä U. Tällöin funktiota f kutsutaan *analyyttiseksi* joukossa G.

3.1.1. Ensimmäiset ominaisuudet ja joitakin vastaesimerkkejä. Yleisenä heuristisena periaatteena kaikki, mitä tiedät reaaliarvoisten funktioiden derivoituvuudesta $\mathbb{R}$:ssä, toimii myös kompleksisesti derivoituvien funktioiden osalta $\mathbb{C}$:ssä, mutta ei päinvastoin! Kompleksinen derivoituvuus on erittäin vahva oletus. Tämä johtuu siitä, että raja-arvon (3.1.2) on oltava olemassa **mille tahansa** jonolle $U \setminus \{z\}$, ja kompleksisen kertolaskun ominaisuuksista (eli luvulla $w - z$ jakamisesta). Esimerkiksi osoittautuu, että kompleksisesti analyyttiset funktiot ovat automaattisesti **äärettömän** monta kertaa derivoituvia, mikä ei ole totta derivoituvien funktioiden osalta $\mathbb{R}$:ssä.

PROPOSITIO 3.1.5 (Analyyttiset funktiot ovat jatkuvia). *Oletetaan, että $U \subset \mathbb{C}$ on avoin, ja $f\colon U \to \mathbb{C}$ on derivoituva pisteessä $z \in U$. Silloin f on jatkuva pisteessä z.*

Todistus. Todistus on sama kuin derivoituvien funktioiden tapauksessa $\mathbb{R}$:ssä. Huomaa, että jos $w \neq z$, niin

$$|f(w) - f(z)| = |w - z|\frac{|f(w) - f(z)|}{|w - z|}.$$

Kun $w \to z$, osamäärä $|f(w)-f(z)|/|w-z|$ suppenee kohti lukua $|f'(z)| \in \mathbb{R}$, ja tietenkin $|w-z| \to 0$. Siksi $|f(w)-f(z)| \to 0$ kun $w \to z$, ja tämä implikoi f:n jatkuvuuden pisteessä z. $\square$

Tässä on kätevä (ja todennäköisesti tuttu) karakterisointi derivoituvuudelle:

Propositio 3.1.6. *Oletetaan, että $U \subset \mathbb{C}$ on avoin, $f\colon U \to \mathbb{C}$, ja $z \in U$.*

- *Oletetaan, että f on derivoituva pisteessä z. Tällöin on olemassa funktio $\epsilon\colon U \to \mathbb{C}$, jolle $\epsilon(w) \to 0$ kun $w \to z$, ja*

$$f(w) - f(z) = f'(z)(w - z) + \epsilon(w)(w - z), \qquad w \in U. \tag{3.1.2}$$

- *Oletetaan, että on olemassa luku $\alpha \in \mathbb{C}$, ja funktio $\epsilon\colon U \to \mathbb{C}$, jolle $\epsilon(w) \to 0$ kun $w \to z$, ja*

$$f(w) - f(z) = \alpha(w - z) + \epsilon(w)(w - z), \qquad w \in U \setminus \{z\}. \tag{3.1.3}$$

  Tällöin f on derivoituva pisteessä z, ja $f'(z) = \alpha$.

Todistus. Oletetaan ensin, että f on derivoituva pisteessä z, ja asetetaan $\alpha := f'(z)$. Määritellään sitten

$$\epsilon(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \alpha, & w \in U \setminus \{z\}, \\ 0, & w = z. \end{cases}$$

Nyt on helppo tarkistaa, että $\epsilon(w) \to 0$ kun $w \to z$, ja selvästi (3.1.2) pätee.

Toisaalta, jos (3.1.3) pätee, niin

$$\left|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \alpha\right| = |\epsilon(w)|, \qquad w \in U \setminus \{z\}.$$

Koska $\epsilon(w) \to 0$ kun $w \to z$, tämä osoittaa, että f on derivoituva pisteessä z, ja $f'(z) = \alpha$. $\square$

Propositio 3.1.7 (Derivaatan ominaisuuksia). *Oletetaan, että $U \subset \mathbb{C}$ on avoin, ja $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ ovat derivoituvia pisteessä $z \in U$. Olkoon myös $\lambda \in \mathbb{C}$. Silloin funktiot λf, $f + g$ ja fg ovat kaikki derivoituvia pisteessä z. Jos $g(z) \neq 0$, myös osamäärä f/g on derivoituva pisteessä z.*

Lisäksi derivaatoilla on seuraavat eksplisiittiset lausekkeet:

$$(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z), \quad (f+g)'(z) = f'(z)+g'(z), \quad (fg)'(z) = f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

ja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} \quad \textit{(olettaen } g(z) \neq 0\textit{)}.$$

Todistus. Todistukset ovat täsmälleen samat kuin derivoituvien funktioiden tapauksessa $\mathbb{R}$:ssä. $\square$

Korollaari 3.1.8. *Olkoon $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Silloin funktio $p_n(z) = z^n$ on analyyttinen joukossa $\mathbb{C}$, ja sen derivaatta on $p_n'(z) = nz^{n-1}$.*

Todistus. Käsitellään ensin tapausta $n = 1$. Silloin,

$$p_1'(z) = \lim_{w \to z} \frac{w - z}{w - z} = 1 = 1 \cdot z^0, \qquad z \in \mathbb{C},$$

kuten halutaankin. Tapaukset $n \geq 2$ voidaan todistaa induktiolla käyttäen Lausetta 3.1.7:

$$\begin{aligned} p_n'(z) = (p_{n-1}p)'(z) &= p_{n-1}'(z)p_1(z) + p_{n-1}(z)p_1'(z) \\ &= (n-1)z^{n-2}z + z^{n-1} \cdot 1 = nz^{n-1}. \end{aligned}$$

Tämä viimeistelee todistuksen. $\square$

Huomautus 3.1.9. Edellisen korollaarin seurauksena jokainen polynomifunktio $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ on analyyttinen joukossa $\mathbb{C}$ ja sen derivaatta on $p'(z) = na_n z^{n-1} + \ldots + 2a_2 z + a_1$.

Funktiot kuten $\sqrt[n]{z}$, e^z, $\operatorname{Log} z$ ovat myös analyyttisia sopivassa määrittelyjoukossa. Tämä osoitetaan myöhemmin kunhan olemme kehittäneet hieman teoriaa, joka helpottaa todistuksia.

Tässä tulee ensimmäinen esimerkki siitä, että kompleksinen differentioituvuus on jotain hyvin erityistä:

Esimerkki 3.1.10. Funktio $f(z) = \bar{z}$ ei ole **missään** kompleksisesti differentioituva. Tämä jää harjoitustehtäväksi. Tämä esimerkki on huomionarvoinen, koska koordinaattimuodossa ilmaistuna kuvaus $z \mapsto \bar{z}$ on vain $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Koordinaattifunktiot ovat $u(x, y) = x$ ja $v(x, y) = -y$, joten erityisesti kuvaus on äärettömän monta kertaa differentioituva kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Toinen dramaattinen esimerkki on funktio $z \mapsto |z|^2 = x^2 + y^2$. Jos tämä funktio olisi kompleksisesti differentioituva pisteessä $z \neq 0$, niin sama olisi totta myös funktiolle $z \mapsto \bar{z} = |z|^2/z$. Mutta tiedämme, ettei $z \mapsto \bar{z}$ ole differentioituva missään, joten $z \mapsto |z|^2$ ei voi olla differentioituva pisteiden $z \neq 0$ ulkopuolella.

Huomautus 3.1.11. Olemme nyt nähneet, että kaikki "z":n polynomit ovat analyyttisia $\mathbb{C}$:ssä, mutta yksinkertaisin "$\bar{z}$":n polynomi ei ole analyyttinen edes yhdessä pisteessä. Tämä liittyy yleiseen periaatteeseen: jokainen analyyttinen funktio voidaan (lokaalisti) ilmaista suppenevana potenssisarjana muodossa $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Tämä osoitetaan kurssilla *Kompleksianalyysi 2*.

3.1.2. Yhdistetyn funktion ja käänteisfunktioiden derivaatat. Jatkamme tuloksilla, jotka (toivottavasti) näyttävät tutuilta reaalifunktioiden teoriasta $\mathbb{R}$:ssä.

LAUSE 3.1.12 (Ketjusääntö). *Olkoon $U, V \subset \mathbb{C}$ avoimia joukkoja, ja olkoon $z \in U$. Oletetaan, että $f: U \to \mathbb{C}$ on funktio, joka on differentioituva pisteessä z ja $f(U) \subset V$. Oletetaan lisäksi, että $g: V \to \mathbb{C}$ on differentioituva pisteessä $f(z)$.*

Silloin yhdistettu kuvaus $g \circ f: U \to \mathbb{C}$ on differentioituva pisteessä z, ja

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

TODISTUS. Seuraava päättely on helppo muistaa, mutta ei ole täysin tarkka:

$$\lim_{w\to z} \frac{(g\circ f)(w) - (g\circ f)(z)}{w-z} = \lim_{w\to z} \frac{g(f(w)) - g(f(z))}{f(w) - f(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} = g'(f(z))f'(z).$$

Ongelma tässä on, että voi käydä niin, että $f(w) = f(z)$ (vaikka $w \neq z$), ja silloin jaamme nollalla. Tarkka päättely käyttää Lausetta 3.1.6, joka mahdollistaa sekä $f(w)$:n että $g(f(w))$ ilmaisemisen muodossa

$$\begin{cases} f(w) - f(z) = (f'(z) + \epsilon_f(w))(w-z), \\ g(f(w)) - g(f(z)) = [g'(f(z)) + \epsilon_g(f(w))](f(w) - f(z)) \end{cases}$$

missä $\epsilon_f(w) \to 0$, kun $v \to z$, ja $\epsilon_g(v) \to 0$, kun $v \to f(z)$. Tällöin, kun $w \neq z$, saamme

$$\begin{aligned} \frac{g(f(w)) - g(f(z))}{w-z} &= \frac{[g'(f(z)) + \epsilon_g(f(w))](f(w) - f(z))}{w-z} \\ &= [g'(f(z)) + \epsilon_g(f(w))][f'(z) + \epsilon_f(w)]. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Tässä $\epsilon_f(w) \to 0$ kun $w \to 0$, mutta myös $\epsilon_g(f(w)) \to 0$ kun $w \to z$, koska $f(w) \to f(z)$ funktion f jatkuvuuden nojalla (Lause 3.1.5). Siksi lauseke (3.1.4) suppenee kohti arvoa $g'(f(z))f'(z)$, kun $w \to z$, kuten halutaankin. □

PROPOSITIO 3.1.13 (Käänteisfunktion derivaatta). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, ja olkoon $f: U \to \mathbb{C}$ kuvaus. Oletetaan lisäksi, että $V \subset \mathbb{C}$ on avoin, ja $g: V \to U$ on kuvaus, joka on jatkuva pisteessä $w \in V$ ja toteuttaa*

$$f(g(v)) = v \text{ kaikilla } v \in V. \tag{3.1.5}$$

Jos f on differentioituva pisteessä $g(w)$ ja $f'(g(w)) \neq 0$, niin g on differentioituva pisteessä w, ja

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}.$$

HUOMAUTUS 3.1.14. Lause 3.1.13 ei edellytä, että f on bijektio, ja tulos todellakin soveltuu tilanteisiin, joissa f ei ole bijektio U:ssa – yksi esimerkki on $f(z) = z^2$ määritelty $\mathbb{C}$:ssä, katso luku 3.1.3. Kuitenkin, (3.1.5) mukaan $f|_{g(V)} \colon g(V) \to V$ on bijektio, ja $g = (f|_{g(V)})^{-1}$.

Itse asiassa, (3.1.5) sanoo, että $f \circ g = \mathrm{Id}_V$, joten riittää osoittaa, että $g \circ f|_{g(V)} = \mathrm{Id}_{g(V)}$. Tämä nähdään kiinnittämällä $g(w) \in g(V)$ (missä $w \in V$) ja huomaamalla

$$g(f(g(w))) \overset{(3.1.5)}{=} g(w).$$

Tällöin $g \circ f|_{g(V)} = \mathrm{Id}_{g(V)}$, kuten haluttiin.

PROPOSITION 3.1.13 TODISTUS: Meidän on näytettävä, että

$$\lim_{\substack{v \to w \\ v \in V \setminus \{w\}}} \frac{g(v) - g(w)}{v - w} = \frac{1}{f'(g(w))}. \tag{3.1.6}$$

Tämän todistamiseksi kiinnitä $v \in V \setminus \{w\}$, ja huomaa, että automaattisesti $g(w) \neq g(v)$, koska muuten $w = f(g(w)) = f(g(v)) = v$ kaavan (3.1.5) perusteella. Tämä havainto mahdollistaa vasemman puolen muuttamisen kaavassa (3.1.6) seuraavasti:

$$\frac{g(v) - g(w)}{v - w} = \frac{g(v) - g(w)}{f(g(v)) - f(g(w))} = \left(\frac{f(g(v)) - f(g(w))}{g(v) - g(w)} \right)^{-1}. \tag{3.1.7}$$

Nyt, kun $v \to w$, meillä on $g(v) \to g(w)$ oletetun jatkuvuuden vuoksi g pisteessä w. Siksi

$$\lim_{v \to w} \frac{f(g(v)) - f(g(w))}{g(v) - g(w)} = f'(g(w)) \neq 0,$$

mikä voidaan syöttää takaisin kaavaan (3.1.7) saadaksemme kaavan (3.1.6). □

3.1.3. Analyyttiset käänteisfunktioiden haarat. Lause 3.1.13 antaa keinon tarkistaa, että analyyttisen funktion käänteisfunktio on myös analyyttinen. Monet analyyttiset funktiot eivät kuitenkaan ole injektiivisiä niiden "luonnollisella" määrittelyjoukolla, joten niillä ei ole globaaleja käänteisfunktioita. Perusesimerkki tästä on funktio $z \mapsto z^n$. Luvusta **??** muistamme, että yhtälöllä $z^n = w$ on aina n erilaista ratkaisua muodossa $z = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\mathrm{Arg}(w) + 2\pi k)/n}$, missä $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Tämä ongelma on helppo korjata: meidän tarvitsee vain rajoittaa funktio $z \mapsto z^n$ johonkin pienempään (avoimeen) joukkoon $U \subset \mathbb{C}$, missä se on injektiivinen. Kirjoittamalla $V := \{z^n : z \in U\}$, voimme määritellä käänteisfunktion $g\colon V \to U$. Ainoa ongelma on, että nyt g riippuu joukon U valinnasta, ja eri valinnat antavat erilaisia käänteisfunktioita. Erilaisia valintoja kutsutaan *käänteisfunktion haaroiksi*. Katso myös aiempi huomautus **??**. Määrittelemme seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 3.1.15 (Käänteisfunktion haara). Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ joukko ja $f\colon U \to \mathbb{C}$ kuvaus (ei välttämättä injektiivinen). Oletetaan, että $V \subset f(U)$ on toinen joukko ja $g\colon V \to U$ on kuvaus, joka on jatkuva joukossa V ja toteuttaa

$$f(g(v)) = v, \qquad v \in V. \tag{3.1.8}$$

Tällöin g on *käänteisfunktion haara joukossa* V.

Selvennämme määritelmää tutulla esimerkillä:

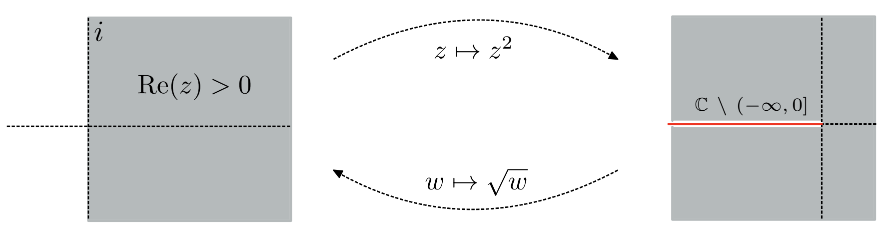
ESIMERKKI 3.1.16. Olkoon $n \geq 2$. Päähaarafunktio $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ määriteltiin

$$g_n(w) := \sqrt[n]{w} := \begin{cases} 0, & w = 0, \\ \sqrt[n]{|w|}e^{i\mathrm{Arg}(w)/n}, & w \neq 0. \end{cases}$$

Olkoon $f_n(z) := z^n$. Nyt

$$f_n(g_n(v)) = (\sqrt[n]{v})^n = v, \qquad v \in \mathbb{C},$$

joten kaava (3.1.8) pitää paikkansa kaikilla $v \in \mathbb{C}$. Kuitenkaan g_n ei ole **ei** ole haara f_n^{-1} joukossa $\mathbb{C}$, koska g_n ei ole jatkuva $\mathbb{C}$:ssä. Kuitenkin g_n on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ja siten se on käänteisfunktion f_n^{-1} haara joukossa $V := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Miltä $g_n(V)$ näyttää? Kuva 1 näyttää pääneliöjuuren $\sqrt{\cdot}$



KUVA 1. Kuvausominaisuudet $z \mapsto z^2$ ja $w \mapsto \sqrt{w}$.

kuvan rajoitettuna joukkoon $V = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$: kuva on puolitaso $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Yleisemmin funktio $\sqrt[n]{\cdot}$ kuvajoukko V on sektori $S_n = \{re^{i\theta} : r > 0 \text{ ja } -\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{n}\}$.

Kun meillä on hieman intuitiota määritelmästä, katsotaan, miksi se on oikea:

LAUSE 3.1.17 (Käänteisfunktion haarojen analyyttisyys). *Olkoon* $f\colon U \to \mathbb{C}$ *kuvaus,* $V \subset f(U)$ *ja* $g\colon V \to U$ *käänteisfunktion haara joukossa* V*. Silloin* $f|_{g(V)}\colon g(V) \to V$ *on bijektio, ja* $g = (f|_{g(V)})^{-1}$*.*

Oletetaan lisäksi, että U, V *ovat avoimia, ja* f *on analyyttinen. Silloin* g *on analyyttinen,* $f'(g(w)) \neq 0$ *kaikilla* $w \in V$*, ja*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \qquad w \in V. \tag{3.1.9}$$

Seuraava seuraus on välitön:

KOROLLAARI 3.1.18 (Pääjuurien analyyttisyys). *Pääjuuri* $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ *on analyyttinen joukossa* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$*, ja joukon* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *kuva on sektori* $S_n = \{re^{i\theta} : r > 0 \text{ ja } -\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{n}\}$*. Derivaatta on*

$$(\sqrt[n]{\cdot}\,)'(w) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{w})^{n-1}}, \qquad w \in \mathbb{C} \setminus (0, \infty]. \tag{3.1.10}$$

TODISTUS. Huomasimme esimerkissä 3.1.16, että $g_n := \sqrt[n]{\cdot}$ on funktion $z \mapsto z^n$ käänteisfunktion haara joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Siksi $\sqrt[n]{\cdot}$ on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ lauseen 3.1.17 perusteella. Muistaen, että funktion $z \mapsto z^n$ derivaatta on nz^{n-1}, kaava (3.1.10) seuraa kaavasta (3.1.9). $\square$

Sitten todistamme lauseen 3.1.17. Valitettavasti todistus vaatii joitain tietoja, jotka menevät syvemmälle kuin tämä kurssi. Jos lukija haluaa välttää tämän, hänen tulisi lisätä seuraava *a priori* -oletus lauseeseen: $f'(g(w)) \neq 0$ kaikilla $w \in V$.

LAUSEEN 3.1.17 TODISTUS. Olemme jo osoittaneet huomautuksessa 3.1.14, että $f|_{g(V)}\colon g(V) \to V$ on bijektio, ja $g = (f|_{g(V)})^{-1}$. Tämä ei liity avoimuuteen tai jatkuvuuteen.

Lisätään sitten oletukset, että U, V ovat avoimia, ja f on analyyttinen joukossa U. Koska g on jatkuva ja injektiivinen joukossa V, *alueen säilymisen teoreema* sanoo, että $g(V) \subset U$ on avoin. Kiinnitä $w \in V$, ja olkoon $D \subset g(V)$ pieni levy, joka sisältää $g(w)$. Silloin $f|_D$ on analyyttinen ja injektiivinen, ja D on yhtenäinen. Seuraa sitten *avoimen kuvan teoreemasta* [**Pa90**, Theorem 3.8] injektiivisille analyyttisille funktioille, että $f'(g(w)) \neq 0$. Toisin sanoen $f' \neq 0$ joukossa $g(V)$. Tämän jälkeen g:n analyyttisyyden ja kaavan (3.1.9) saamme suoraan lauseesta 3.1.13. $\square$

HUOMAUTUS 3.1.19. Kompleksianalyysissä kysytään usein: ”Onko neliöjuurella haaraa avoimessa joukossa $V \subset \mathbb{C}$?”tai ”Onko logaritmilla haaraa avoimessa joukossa $V \subset \mathbb{C}$?”Kun näet tällaisen kysymyksen, muista Määritelmä 3.1.15.

Esimerkiksi “neliöjuurella on haara V”:ssa, jos on olemassa jatkuva kuvaus $g\colon V \to \mathbb{C}$, jolla $g(w)^2 = w$ kaikilla $w \in V$. Analyyttisyys seuraa ilmaiseksi lauseesta 3.1.17.

3.2. Cauchy-Riemannin yhtälöt

Tutkimme seuraavia kysymyksiä:

- Mikä on kompleksidifferentioituvuuden ero “tavalliseen” tai “reaaliseen” differentioituvuuteen kuvausten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ osalta?
- Annetaan “reaalisesti” differentioituva funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Onko olemassa “testiä”, jolla nähdään, onko f myös kompleksidifferentioituva, eli analyyttinen?
- Kuinka lasketaan $f'(z)$ (jos se on olemassa) reaalisen derivaatan $Df(z)$ avulla?

Ennen kuin jatkamme, palautetaan mieliin *Vektorianalyysi 1*:n määritelmä reaalidifferentioituvuudesta kuvauksillle $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Määritelmä 3.2.1 (Reaalidifferentioituvuus). Olkoon $U \subset \mathbb{R}^m$ avoin ja $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ kuvaus. Tällöin f on *reaalidifferentioituva* pisteessä $p \in U$, jos on olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (jota kutsutaan myös *funktion f derivaataksi pisteessä* p ja usein merkitään $L = Df(p)$) siten, että

$$f(q) - f(p) = L(q-p) + \epsilon(q)|q-p|, \tag{3.2.1}$$

Tässä $\epsilon = \epsilon_p\colon U \to \mathbb{R}^n$ on kuvaus, jolle $\epsilon(q) \to 0$ kun $q \to p$.

Tarvitsemme edellä olevaa määritelmää vain kun $m = 2$ ja $n \in \{1,2\}$. Jos $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ja $u : U \to \mathbb{R}$ on differentioituva, on tapana merkitä funktion $u(x,y)$ osittaiderivaatat seuraavasti:

$$u_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \qquad u_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Tarvitsemme myös seuraavan lauseen, joka selittää, miten lineaarikuvaus L voidaan ilmaista osittaisderivaattojen matriisina:

Propositio 3.2.2. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja $f = (u,v)\colon U \to \mathbb{R}^2$ kuvaus. Oletetaan, että f on differentioituva pisteessä $z \in U$. Silloin sekä u että v ovat differentioituvia pisteessä z, niiden osittaisderivaatat ovat olemassa pisteessä z, ja lineaarikuvaus L voidaan esittää osittaisderivaattojen avulla seuraavasti:*

$$L(x,y) = \begin{bmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Palaamme sitten kompleksidifferentioituvuuteen. Kaava (3.2.1) muistuttaa hyvin paljon kompleksidifferentioituvuuden ominaisuuksia, jotka näimme Lauseessa 3.1.6. Muistutuksena:

$$f(w) - f(z) = f'(z)(w-z) + \epsilon(w)(w-z), \tag{3.2.2}$$

missä $\epsilon\colon U \to \mathbb{C}$ ja $\epsilon(w) \to 0$ kun $w \to z$. Haluttaessa tämä voidaan tuoda muotoon (3.2.1) määrittelemällä $\tilde{\epsilon}(w) = (w-v)\epsilon(w)/|w-z|$: tällöin $\tilde{\epsilon}\colon U \to$

$\mathbb{C}$, pätee yhä $\tilde{\epsilon}(w) \to 0$ kun $w \to z$, ja (3.2.2) voidaan kirjoittaa uudelleen seuraavasti

$$f(w) - f(z) = f'(z)(w - z) + \tilde{\epsilon}(w)|w - z|. \tag{3.2.3}$$

Suurin ero (3.2.1) ja (3.2.2) (tai (3.2.3)) välillä on se, että (3.2.2):ssä lineaarikuvaus L on erityinen, nimittäin $L(\zeta) = f'(z)\zeta$. Tämän ymmärtämiseksi näytämme, että $\zeta \mapsto f'(z)\zeta$ voidaan kirjoittaa matriisituloa käyttäen.

Esimerkki 3.2.3. Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Tällöin kuvaus $w \mapsto zw$ on lineaarinen kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Itse asiassa, jos kirjoitamme $z = a + ib$ ja $w = x + iy$, niin

$$zw = M_z(x, y) \quad \text{jossa} \quad M_z := M_{a+ib} := \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{3.2.4}$$

Siis kompleksiluvulla kertominen määrittää (reaalisen) lineaarikuvauksen $M_z \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Seuraava seuraus on syytä esittää erikseen:

Korollaari 3.2.4. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f = (u, v) \colon U \to \mathbb{C}$ kompleksidifferentioituva pisteessä $z \in U$. Tällöin f on myös reaalidifferentioituva pisteessä z (kuvauksena $U \to \mathbb{R}^2$).*

Todistus. Tämä seuraa välittömästi kaavasta (3.2.2) ja siitä tosiasiasta, että $L(\zeta) := f'(z)\zeta$ määrittää (reaalisen) lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. □

Nyt voimme koota joitain asioita yhteen. Jos $f = (u, v) = u + iv$ on kompleksidifferentioituva pisteessä $z \in U$, niin f on myös reaalidifferentioituva ja sen derivaatta on lineaarikuvaus $L(\zeta) = f'(z)\zeta$. Tässä $f'(z) = a + ib$ jollain $a, b \in \mathbb{R}$. Toisaalta Lause 3.2.2 sanoo, että lineaarikuvaus L voidaan myös kirjoittaa osittaisderivaattojen matriisina:

$$\begin{bmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{bmatrix} = L = M_{f'(z)} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{3.2.5}$$

Kaksi matriisia ovat samoja vain, jos niiden komponentit ovat samat, joten voimme lukea seuraavat *Cauchy-Riemannin yhtälöt*:

$$\begin{cases} u_x(z) = v_y(z), \\ u_y(z) = -v_x(z). \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Olemme saavuttaneet seuraavan lauseen:

Lause 3.2.5 (Cauchy-Riemannin yhtälöt: välttämättömyys). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja oletetaan, että $f = u + iv \colon U \to \mathbb{C}$ on kompleksidifferentioituva pisteessä $z \in U$. Silloin reaali- ja imaginaariosat $u, v \colon U \to \mathbb{R}$ ovat reaalidifferentioituvia pisteessä z ja niiden osittaisderivaatat toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt (3.2.6).*

Lause 3.2.5 sanoo, että yhtälöt (3.2.6) ovat välttämättä voimassa kompleksidifferentioituvalla funktiolla $f = u + iv$. Itse asiassa yhtälöt ovat myös riittävät, joten ne antavat hyödyllisen “testin”kompleksidifferentioituvuudelle:

LAUSE 3.2.6 (Cauchy-Riemannin yhtälöt: riittävyys). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja $f = (u, v)\colon U \to \mathbb{R}^2$ reaalidifferentioituva pisteessä $z \in U$. Oletetaan, että komponenttifunktiot u, v toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt* (3.2.6). *Silloin f on kompleksidifferentioituva pisteessä z.*

TODISTUS. Koska f on reaalidifferentioituvapisteessä z, Lause 3.2.2 kertoo meille, että derivaatta $L = Df(z)$ on matriisi

$$L = \begin{bmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{bmatrix}.$$

Lisäksi soveltamalla Cauchy-Riemannin yhtälöitä saamme selville, että

$$L = \begin{bmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = M_{a+ib},$$

missä $a = u_x(z)$ ja $b = v_x(z)$, ja käytämme M_{a+ib}-merkintää, joka on tuttu (3.2.4) kaavasta. Nyt, määritelmän (3.2.1) ja (3.2.4) perusteella päättelemme, että

$$\begin{aligned} f(w) - f(z) &\overset{\text{def.}}{=} M_{a+ib}(w - z) + \epsilon(w)|w - z| \\ &\overset{(3.2.4)}{=} (a + ib)(w - z) + \tilde{\epsilon}(w)(w - z), \end{aligned}$$

missä $\epsilon(w) \to 0$, kun $w \to z$, ja $\tilde{\epsilon}(w) := |w-z|\epsilon(w)/(w-z)$ toteuttaa samoan ominaisuuden. Mutta viimeinen yhtälö on täsmälleen sama kuin kompleksisen derivoituvuuden karakterisointi, katso joko (3.2.2) tai Proposition 3.1.6. Näin ollen f on kompleksisesti derivoituva pisteessä z, ja

$$f'(z) = a + ib = u_x(z) + iv_x(z). \tag{3.2.7}$$

Tämä päättää todistuksen. □

Kaava (3.2.7) antaa eksplisiittisen tavan esittää $f'(z)$ funktion u ja v osittaisderivaattoijen avulla. Tämä kannattaa erikseen huomioida:

KOROLLAARI 3.2.7. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin, ja oletetaan, että $f = u + iv$ on kompleksisesti derivoituva pisteessä $z \in U$. Silloin*

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iu_y(z).$$

TODISTUS. Ensimmäinen yhtälö on (3.2.7), ja toinen yhtälö on Cauchy-Riemannin yhtälöiden (3.2.6) seuraus. □

Seuraavat esimerkit näyttävät, miten Cauchy-Riemannin yhtälöitä voi käyttää analyyttisyyden osoittamiseen ja kompleksisten derivaattojen määräämiseen. Kaikki palautuu reaalisten derivaattojen laskemiseen.

Esimerkki 3.2.8 (e^z on analyyttinen). Näytetään nyt, että $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ on analyyttinen. Jos $z = x + iy$, määritelmä $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ antaa, että funktion $f(z)$ reaali- ja imaginääriosat ovat

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Voimme tarkistaa, että Cauchy-Riemannin yhtälöt pätevät ottamalla reaaliset osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y = v_y, \\ u_y &= -e^x \sin y = -v_x. \end{aligned}$$

Näin ollen f on Lauseen 3.2.6 mukaan analyyttinen. Korollaari 3.2.7 näyttää, että

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Näin ollen funktion e^z kompleksinen derivaatta on funktio itse,

$$(e^z)' = e^z.$$

Tämä on analoginen reaalisen eksponenttifunktion ominaisuuden $(e^x)' = e^x$ kanssa.

Esimerkki 3.2.9 (Log on analyyttinen). Huomautuksen **??** perusteella, jos $\mathcal{S} = \{-\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$, kuvaus

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathcal{S} \tag{3.2.8}$$

on käänteiskuvaus funktiolle $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $f(z) = e^z$. Se on myös jatkuva. Koska e^z on analyyttinen Lauseen 3.1.17 mukaan, seuraa, että Log on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ja

$$(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Näytämme seuraavaksi, että voimme kirjoittaa Cauchy-Riemannin yhtälöt tiiviimmin *Wirtinger-derivaattojen* avulla

$$\begin{aligned} \overline{\partial} f(z) &:= \frac{1}{2}(f_x + i f_y), \\ \partial f(z) &:= \frac{1}{2}(f_x - i f_y). \end{aligned}$$

Tässä, jos $f = u + iv$, kirjoitamme $f_x = u_x + iv_x$.

Propositio 3.2.10. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin, ja olkoon $f = (u, v) \colon U \to \mathbb{R}^2$ reaalidifferentioituva pisteessä $z \in U$. Tällöin f on kompleksisesti derivoituva pisteessä z jos ja vain jos*

$$\overline{\partial} f(z) = 0.$$

Lisäksi, jos tämä pätee, niin $f'(z) = \partial f(z)$.

TODISTUS. Huomaamme, että

$$2\overline{\partial}f(z) = f_x + if_y = u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) = u_x - v_y + i(u_y + v_x).$$

Näin ollen $\overline{\partial}f(z) = 0$ jos ja vain jos Cauchy-Riemannin yhtälöt (3.2.6) pätevät. Ensimmäinen osa tuloksesta seuraa siis lauseesta 3.2.6. Lisäksi, jos tämä pätee, niin

$$\partial f(z) = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y)) = u_x + iv_x.$$

Korollaari 3.2.7 antaa $f'(z) = \partial f(z)$. □

VAROITUS 3.2.11. Aiemmassa lauseessa 3.2.6 oletimme, että kuvaus $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ on reaalisesti differentioituva pisteessä $z \in U$. Tätä oletusta **ei voida** heikentää muotoon *molemmat osittaisderivaatat u, v ovat olemassa pisteessä $z \in U$ ja täyttävät Cauchy-Riemannin yhtälöt* (3.2.6). Itse asiassa tämä heikompi oletus ei edes takaa, että f on jatkuva pisteessä z! Esimerkiksi ajatellaan kuvausta $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, joka toteuttaa seuraavan ehdon:

$$f(r, 0) = (0, 0) = f(0, s), \qquad r, s \in \mathbb{R}.$$

Tai toisin sanoen, f on nolla reaali- ja imaginääriakseleilla $\mathbb{R}$ ja $i\mathbb{R}$. Tällöin

$$\partial_1 u(0) = \partial_2 u(0) = \partial_1 v(0) = \partial_2 v(0) = 0.$$

Voimme esimerkiksi määritellä $f \equiv (10^{10}, 10^{10})$ joukon $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ ulkopuolella. Tällöin f ei ole jatkuva pisteessä 0, vaikka se täyttääkin Cauchy-Riemannin yhtälöt pisteessä 0.

Edellinen varoitus osoittaa, että osittaisderivaattojen olemassaolo yhdessä pisteessä ei käytännössä takaa mitään (katso Esimerkki 3.2.13 vielä pelottavammasta tilanteesta). Kuitenkin seuraava tulos kurssilta *Vektorianalyysi 1* sanoo, että lisäoletus pelastaa tilanteen.

LAUSE 3.2.12. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko, $f = (u, v)\colon U \to \mathbb{R}^2$ kuvaus, ja $z \in U$. Oletetaan, että osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x, v_y ovat olemassa kaikkialla U:ssa ja ne ovat jatkuvia pisteessä z. Silloin f on (reaalisesti) differentioituva pisteessä z. Lisäksi, jos Cauchy-Riemannin yhtälöt* (3.2.6) *toteutuvat, niin f on myös kompleksisesti differentioituva pisteessä z.*

Nämä tulokset jättävät edelleen avoimeksi kysymyksen: entä jos osittaisderivaatat ovat olemassa kaikkialla U:ssa ja täyttävät Cauchy-Riemannin yhtälöt, mutta niiden **ei** oleteta olevan jatkuvia? Seuraava esimerkki osoittaa, että tässä tapauksessa f ei välttämättä ole jatkuva, saati sitten differentioituva:

Esimerkki 3.2.13. Harkitse kuvaa
$$f(z) = \begin{cases} \exp(-z^{-4}), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$
Kompleksinen eksponenttifunktio e^z määriteltiin Määritelmässä 1.5.1. Tällöin f:llä on seuraavat ominaisuudet:

- f on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- u ja v osittaisderivaatat ovat olemassa ja ne täyttävät Cauchy-Riemannin yhtälöt kaikkialla - myös origossa!
- f ei ole jatkuva pisteessä 0.

f:n analyyttisyys joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ seuraa funktion $z \mapsto e^z$ ja $z \mapsto -z^{-4}$ analyyttisyydestä joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jatkuvuuden tutkimiseksi pisteessä 0, huomataan että $r \in \mathbb{R}$ tapauksessa
$$f(r) = e^{-r^{-4}} \to 0 \quad \text{ja} \quad f(ir) = e^{-(ir)^{-4}} = e^{-r^{-4}} \to 0$$
kun $r \to 0$. Joten f suppenee nollaan sekä reaali- että imaginääriakselilla. Itse asiassa suppeneminen on niin nopeaa, että f:n osittaisderivaatat ovat olemassa ja yhtä suuret "nollan kanssa"origossa (erityisesti Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat voimassa "nollassa"). Toisaalta f:llä on hyvin erilainen käyttäytyminen pitkin suoraa $\mathrm{span}(e^{-i\pi/4})$:
$$f(re^{-i\pi/4}) = \exp(-(re^{-i\pi/4})^{-4}) = \exp(-r^{-4}e^{i\pi}) = \exp(r^{-4}) \xrightarrow{r\to 0} \infty.$$
Siis f "räjähtää"lähestyttäessä origoa pitkin suoraa $\mathrm{span}(e^{-i\pi/4})$, ja se ei ole varmasti jatkuva origossa.

3.3. Muutamia sovelluksia

Kirjaamme muutamia helppoja seurauksia Cauchy-Riemannin yhtälöistä. Muistetaan yhtenäisten avointen joukkojen määritelmä 2.4.1.

Korollaari 3.3.1. *Oletetaan, että $U \subset \mathbb{R}^2$ on avoin ja yhtenäinen, ja $f \colon U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, jolle $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in U$. Silloin f on vakio joukossa U.*

Todistus. Olkoon $f = u + iv$. Korollaarista 3.2.7 näemme, että funktioiden u ja v osittaisderivaatat ovat identtisesti nollia joukossa U. Siksi gradientit $\nabla u = (u_x, u_y)$ ja $\nabla v = (v_x, v_y)$ ovat identtisesti nollia joukossa U. Tämän tiedon jälkeen todistuksessa ei enää tarvita kompleksianalyysiä.

Nähdäksemme, että f on vakio, riittää osoittaa, että sekä u että v ovat vakioita. Keskitytään u:n tapaukseen. Jos onnistumme osoittamaan, että u on lokaalisti vakio, seuraa Lauseen 2.4.4 ja joukon U yhtenäisyyden perusteella, että u on vakio joukossa U. Joten osoittakaamme, että u on lokaalisti vakio.

Kiinnitetään $z \in U$. Koska U on avoin, on olemassa säde $r > 0$ siten, että $D := D(z, r) \subset U$. Osoitamme, että $u|_D \equiv u(z)$. Jos $w \in D$, niin pisteiden z ja w välinen jana on kokonaan joukossa $D \subset U$. Tämä jana voidaan parametrisoida polkuna $\gamma_w(t) = tw + (1-t)z$, $t \in [0, 1]$. Nyt yhdistetty funktio $u \circ \gamma_w \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ on (reaalisesti) differentioituva, ja usean muuttujan ketjusäännön perusteella (katso *Vektorianalyysi 1*)

$$(u \circ \gamma_w)'(t) = \nabla u(\gamma_w(t)) \cdot \gamma_w'(t) = 0, \qquad t \in [0, 1].$$

Tästä seuraa, että $u \circ \gamma_w$ on vakio, ja $u(z) = u(\gamma_w(0)) = u(\gamma_w(1)) = u(w)$. Koska $w \in D$ oli mielivaltainen, näemme, että $u|_D \equiv u(z)$, mikä oli osoitettava. □

Päätetään luku seuraavalla korollaarilla, joka tarvitaan maksimimoduuliperiaatteen todistuksessa.

KOROLLAARI 3.3.2. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja yhtenäinen, ja oletetaan, että $f \colon U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Oletetaan, että jokin seuraavista kolmesta funktiosta on vakio joukossa U:*

$$u = \operatorname{Re}(f), \quad v = \operatorname{Im}(f), \quad \textit{tai} \quad |f|.$$

Silloin f on vakio joukossa U. Sama tulos pätee myös, jos $f \colon U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $\operatorname{Arg}(f)$ on vakio joukossa U.

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

Yhteenveto luvusta 3. Tässä on lista tämän luvun keskeisistä aiheista:

- Kompleksiderivaatat ja analyyttiset funktiot.
- Muuttujan z polynomit, e^z ja $\operatorname{Log} z$ ovat analyyttisia, mutta kuvaus $z \mapsto \bar{z}$ ei ole.
- Tulon, yhdistetyn funktion ja käänteisfunktion derivointisäännöt.
- Käänteisfunktion haarat.
- Cauchy-Riemannin yhtälöt ja kompleksidifferentioituvuuden ja reaalidifferentioituvuuden vertailu.
- Analyyttiset funktiot, joilla $f'(z) = 0$, ovat vakioita yhtenäisissä joukoissa.

LUKU 4

Kompleksinen integrointi

4.1. Polut

Määrittelimme *polut* osiossa 2.4, mutta kerrataan ja laajennetaan terminologiaa:

MÄÄRITELMÄ 4.1.1 (Polku). *Polku* on jatkuva kuvaus $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Polun γ *jälki* on joukko

$$\gamma^* := \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}.$$

Sanomme, että γ *on polku joukossa* $X \subset \mathbb{C}$, jos $\gamma^* \subset X$. Lopuksi, γ on *suljettu polku* (myös *periodinen polku*), jos $\gamma(a) = \gamma(b)$.

MÄÄRITELMÄ 4.1.2 (C^1-polku). Kuvaus $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on C^1*-polku*, jos γ on derivoituva välillä $[a,b]$ (päätepisteissä yksipuoliset derivaatat) ja derivaatta $\gamma'\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on jatkuva.

Sanomme, että $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on *paloittain* C^1*-polku*, jos on olemassa luvut $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ siten, että $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}\colon [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ on C^1-polku kaikilla $1 \leq j \leq n$.

HUOMAUTUS 4.1.3. Polun γ derivoituvuus välillä $[a,b]$ tarkoittaa, määritelmän mukaan, että jos $\gamma = \alpha + i\beta$ ja $\alpha = \operatorname{Re}\gamma$ ja $\beta = \operatorname{Im}\gamma$, niin komponentit $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat derivoituvia välillä $[a,b]$ (päätepisteissä yksipuoliset derivaatat) ja molemmat derivaatat α' ja β' ovat jatkuvia välillä $[a,b]$. Huomaa, että

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t) \in \mathbb{C}.$$

Toinen huomautus on, että jos γ on (vain) paloittain C^1, niin voi olla olemassa äärellinen joukko $X \subset [a,b]$, jolla $\gamma'(t)$ ei ole määritelty $t \in X$.

Seuraava lisämerkintä on hyödyllinen:

NOTAATIO (Segmentti). Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$ ja $z \neq w$. Tällöin $[z,w]\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ on polku, jonka parametrisointi on

$$[z,w](t) := tw + (1-t)z, \qquad t \in [0,1].$$

Huomaa, että $[z,w]$ on C^1-polku, ja sen kuva $[z,w]^*$ on jana $\{tw + (1-t)z : t \in [0,1]\}$ liittäen z:n ja w:n.

Esimerkki 4.1.4 (Ympyräpolku). Olkoon $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$. Määritellään polku $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ seuraavasti:

$$\gamma(t) := z + re^{int}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Tällöin γ on suljettu C^1-polku, ja sen jälki $\gamma^* = S(z, r)$ on ympyrä keskipisteellä z ja säteellä r. Huomaa, että γ "kiertää ympyrän ympäri" tarkalleen $|n|$ kertaa. Jos $n > 0$, niin γ liikkuu vastapäivään, ja jos $n < 0$, niin γ liikkuu myötäpäivään. Jos $n = 0$, niin $\gamma \equiv z + r$ on vakiopolku.

Käsite '"kiertämisestä $|n|$ kertaa" formalisoidaan myöhemmin, kun puhumme kierrosluvuista.

Olemassa olevista poluista voidaan muodostaa uusia seuraavien käsitteiden avulla:

Määritelmä 4.1.5 (Käänteispolku ja yhdistetty polku). Olkoon $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ polku. *Käänteispolku* $\overleftarrow{\gamma}\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ määritellään

$$\overleftarrow{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t), \qquad t \in [a, b].$$

Huomaa, että $\overleftarrow{\gamma}(a) = \gamma(b)$ ja $\overleftarrow{\gamma}(b) = \gamma(a)$, ja $(\overleftarrow{\gamma})^* = \gamma^*$.

Olkoon $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ja $\eta\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ polkuja, joilla $\gamma(b) = \eta(c)$. Määrittelemme *yhdistetyn polun* $\gamma \star \eta\colon [a, b + d - c] \to \mathbb{C}$ kaavalla

$$(\gamma \star \eta)(t) := \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b], \\ \eta(t - b + c), & t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Tehtävä 4.1. Näytä, että jos $\gamma, \eta\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ ovat paloittain C^1-polkuja, niin $\gamma \star \eta\colon [0, 2] \to \mathbb{C}$ on myös paloittain C^1-polku, ja $(\gamma \star \eta)^* = \gamma^* \cup \eta^*$.

Seuraavassa osiossa tutkimme *kompleksisia polkuintegraaleja*, merkitään $\int_\gamma f(z)\,dz$. Tulee ilmi, että tämän integraalin arvo riippuu ei vain jäljestä γ^*, vaan myös tarkasta parametrisoinnista γ^*. Esimerkiksi poluilla γ ja $\overleftarrow{\gamma}$ on sama jälki, mutta niihin liittyvillä polkuintegraaleilla on vastakkaiset merkit (Propositio 4.2.15). Tästä syystä on kiinnostavaa kysyä: jos kahdella polulla γ, η on sama jälki, milloin voimme taata, että $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\eta f(z)\,dz$? Seuraava määritelmä antaa riittävän ehdon (katso Propositio 4.2.15).

Määritelmä 4.1.6 (Polun uudelleenparametrisointi). Olkoon $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ja $\eta\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ polkuja. Sanomme, että η on *uudelleenparametrisointi* polusta γ, jos on olemassa jatkuva bijektio $\rho\colon [c, d] \to [a, b]$, jolla $\rho(c) = a$, $\rho(d) = b$ ja $\eta = \gamma \circ \rho$.

Jos ρ on paloittain C^1, niin sanomme, että η on paloittain C^1-uudelleenparametrisointi polusta γ.

Huomautus 4.1.7. Jos $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ja $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ ovat paloittain C^1-polkuja ja $\eta = \gamma \circ \rho$ on paloittain C^1-uudelleenparametrisointi polusta γ, niin ketjusäännön perusteella

$$\eta'(t) = \gamma'(\rho(t))\rho'(t) \tag{4.1.1}$$

kaikilla $t \in [c,d]$ äärellisen joukon ulkopuolella.

Esimerkki 4.1.8. Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ei-suljettu polku. Silloin käänteispolku $\overleftarrow{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ei **koskaan** ole uudelleenparametrisointi polusta γ. Itse asiassa, jos $\eta = \gamma \circ \rho\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on mikä tahansa uudelleenparametrisointi polusta γ, niin $\eta(a) = \gamma(\rho(a)) = \gamma(a)$. Kuitenkin $\overleftarrow{\gamma}(a) = \gamma(b) \neq \gamma(a)$.

Tämä jättää auki kysymyksen suljetuista poluista, esimerkiksi $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, mutta katso seuraavaa tehtävää kielteisen vastauksen saamiseksi.

Tehtävä 4.2. Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ polku. Oletetaan, että on olemassa kaksi erillistä pistettä $z_1, z_2 \in \gamma^*$ siten, että

$$\operatorname{card} \gamma^{-1}\{z_j\} = 1, \qquad j \in \{1,2\}. \tag{4.1.2}$$

Näytä, että $\overleftarrow{\gamma}$ ei ole **uudelleen**parametrisointi polusta γ. Näytä esimerkillä, että yhden pisteen olemassaolo ei riitä samaan johtopäätökseen.

Jos $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, niin jokainen piste $z \in \gamma^* \setminus \{1\} = S(0,1) \setminus \{1\}$ täyttää (4.1.2). Näin ollen voimme helposti löytää kaksi erillistä pistettä $z_1, z_2 \in \gamma^*$, jotka täyttävät (4.1.2), ja siksi $\overleftarrow{\gamma}$ ei ole uudelleenparametrisointi polusta γ.

4.2. Kompleksinen polkuintegraali

Määrittelemme ensin integraalit $\mathbb{C}$-arvoisille funktioille:

Määritelmä 4.2.1. Olkoon $a < b$, ja olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ funktio siten, että sekä $u = \operatorname{Re} f$ että $v = \operatorname{Im} f$ ovat Riemann-integroituvia. Määritellään sitten

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Seuraava on yksi kurssin keskeisistä määritelmistä.

Määritelmä 4.2.2 (Kompleksinen polkuintegraali). Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ paloittain C^1-polku, ja olkoon $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ jatkuva. Tällöin *f:n kompleksinen polkuintegraali* polun γ yli on

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &:= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im}\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,dt.\end{aligned}$$

Selvennämme ja pohdimme määritelmää muutamilla huomioilla.

Huomautus 4.2.3. Funktiot $\mathrm{Re}\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)$ ja $\mathrm{Im}\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)$ ovat paloittain jatkuvia ja siten Riemann-integroituvia. Derivaatta $\gamma'(t)$ on määritelty vain $t \in [a,b] \setminus X$, missä $X \subset [a,b]$ on äärellinen joukko. Kuitenkin voimme määritellä $\gamma'(t)$ mielivaltaisesti t:n arvoille joukossa X ja varmistaa sitten, että yllä olevien Riemann-integraalien arvot eivät riipu valinnasta. Tämä on yllä olevien integraalien tarkka merkitys.

Huomautus 4.2.4. Integraalit, jotka esiintyvät määritelmässä $\int_\gamma f(z)\,dz$, voidaan esittää eksplisiittisesti. Jos $f = f_1 + if_2$ ja $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, niin

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = \big(f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\big) + i\big(f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\big),$$

joten $\int_\gamma f(z)\,dz$ saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz = &\int_a^b \big[f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\big]\,dt \\ &+ i\int_a^b \big[f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\big]\,dt.\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Huomautus 4.2.5. On olemassa standardi määritelmä jatkuvan kuvauksen $F\colon \gamma^* \to \mathbb{R}^2$ **reaaliselle** polku-integraalille polun $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ yli. Se näyttää seuraavalta:

$$\int_\gamma F(s)\,ds := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt,$$

missä $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ viittaa vektorien $F(\gamma(t))$ ja $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ pistetuloon. Tässä kurssissa emme käsittele reaalisia polku-ntegraaleja, joten merkintä $\int_\gamma f(z)\,dz$ viittaa **aina** kompleksiseen polkuintegraaliin Määritelmän 4.2.2 mukaan.

Seuraava esimerkki osoittautuu äärimmäisen tärkeäksi:

Esimerkki 4.2.6. Olkoon $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$, ja määritellään "ympyräpolku"$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ kaavalla $\gamma(t) := e^{it}$. Silloin $\gamma'(t) = ie^{it}$, joten

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}\,dt}{e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \tag{4.2.2}$$

Yleisemminkin, jos $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, ja $\gamma_n(t) := z_0 + re^{int}$, niin $\gamma_n'(t) = inre^{int}$, ja siten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z - z_0} = n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.2.3}$$

Oikea puoli vastaa intuitiotamme "kuinka monta kertaa polku γ_n kiertää pisteen z_0 ympäri". Palataan tähän vielä myöhemmin!

VAROITUS 4.2.7. Aikaisemmissa kursseissa olet ehkä laskenut integraaleja $\mathbb{R}$:ssä säännöllä

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a), \tag{4.2.4}$$

missä $F' = f$ väleillä $[a, b]$. Kompleksipolkuintegraalien tilanne on monimutkaisempi. On olemassa oikea versio kaavasta (4.2.4) kompleksipolkuintegraaleille, mutta kuten Lause 4.3.4 tulee sanomaan, sitä voidaan soveltaa vain, jos primitiivi F on analyyttinen avoimessa joukossa, joka sisältää jäljen γ^*.

Esittelemme myös seuraavan polkuintegraalin variantin:

MÄÄRITELMÄ 4.2.8 (Polkuintegraali kaarenpituuden suhteen). Olkoon $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ paloittain C^1, ja olkoon $f = f_1 + if_2\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ jatkuva. *Funktion f polkuintegraali kaarenpituuden suhteen* polun γ yli on kompleksiluku

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt := \int_a^b f_1(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt + i\int_a^b f_2(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt,$$

missä $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}$ on $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ moduuli.

ESIMERKKI 4.2.9. Jatketaan funktiolla $f(z) = 1/z$ ja $\gamma(t) := e^{it}$, missä $t \in [0, 2\pi]$. Koska $|\gamma'(t)| = 1$, polkuintegraali kaarenpituuden suhteen on

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt = 0.$$

Erityisesti $\int_\gamma f(z)\,|dz| = 0 \neq 2\pi i = \int_\gamma f(z)\,dz$.

Polkuintegraali kaarenpituuden suhteen on hyödyllinen, koska se antaa ylärajan kompleksipolkuintegraalille (ja ylärajan laskeminen on usein helpompaa):

PROPOSITIO 4.2.10. *Olkoon $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ paloittain C^1, ja olkoon $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ jatkuva. Silloin,*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz|.$$

Todistus on helpompi, kun olemme ensin huomanneet seuraavan perusominaisuuden:

PROPOSITIO 4.2.11. *Kompleksinen polkuintegraali on (kompleksi)lineaarinen: jos $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ on paloittain C^1-polku, $f, g\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, niin*

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)(z)\,dz = \alpha\int_\gamma f(z)\,dz + \beta\int_\gamma g(z)\,dz.$$

Todistus. Tämä on "intuitiivisesti ilmeistä" Riemann-integraalin lineaarisuuden vuoksi, mutta voit tuntea olosi hieman epävarmemmaksi muistellessasi kompleksipolkuintegraalin tarkkaa määritelmää (4.2.1). Laskujen tarkistaminen on harjoitustehtävä. □

Olemme nyt valmiita todistamaan Proposition 4.2.10:

Proposition 4.2.10 Todistus. Olkoon $w := \int_\gamma f(z)\,dz$. Jos $w = 0$, ei ole mitään todistettavaa. Muussa tapauksessa voimme kirjoittaa luvun w polaarikoordinaateissa:

$$w = |w|e^{i\theta}, \qquad \theta \in \arg(w).$$

Nyt kompleksipolkuintegraalin lineaarisuuden perusteella voimme kirjoittaa

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = |w| = e^{-i\theta}w = \int_\gamma e^{-i\theta} f(z)\,dz.$$

Vasen puoli on selvästi reaaliluku, joten myös oikea puoli on reaaliluku. Toisaalta kompleksipolkuintegraalin määritelmän perusteella

$$\int_\gamma e^{-i\theta} f(z)\,dz = \int_a^b \mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,dt.$$

Koska vasen puoli on reaaliluku, myös oikean puolen on oltava. Näin ollen

$$\int_a^b \mathrm{Im}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,dt = 0,$$

ja olemme nyt osoittaneet, että

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,dt.$$

Oikea puoli on kuvauksen $t \mapsto \mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)$ Riemann-integraali, joten

$$\int_a^b \mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\,dt \le \int_a^b \big|\mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\big|\,dt.$$

Jotta voimme päättää todistuksen, on huomattava, että

$$\big|\mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\big| \le \big|e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big| \le |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|,$$

joten

$$\int_a^b \big|\mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\big|\,dt \le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \overset{\text{def.}}{=} \int_\gamma |f(z)|\,|dz|.$$

Tämä päättää todistuksen. □

Kirjaamme seurauslauseen:

Korollaari 4.2.12. *Olkoon* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *paloittain* C^1*, ja olkoon* $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ *jatkuva. Silloin*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \|f\|_\infty \ell(\gamma),$$

missä $\|f\|_\infty := \sup\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}$*, ja* $\ell(\gamma)$ *on polun* γ *pituus:*

$$\ell(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Todistus. Huomaamme, että

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \overset{\text{Kor. 4.2.10}}{\leq} \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \overset{\text{def.}}{=} \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Tämä päättää todistuksen. □

Huomaa, että $\ell(\gamma) < \infty$ jokaiselle C^1-polulle $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, koska $t \mapsto |\gamma'(t)|$ on jatkuva ja siten tasaisesti rajoitettu välillä $[a,b]$. Itse asiassa $\ell(\gamma) < \infty$ pätee myös paloittain C^1-poluille $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, koska γ voidaan kirjoittaa muodossa $\gamma = \gamma_1 \star \cdots \star \gamma_n$, missä jokainen γ_j on C^1 ja

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \cdots + \ell(\gamma_n) < \infty.$$

Määrittelemämme pituus $\ell(\gamma)$ yhtyy muihin polun pituuden käsitteisiin, joita lukija on saattanut mahdollisesti nähdä, esimerkiksi 1-ulotteinen Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^1(\gamma^*)$. Tätä ei käsitellä kurssilla, mutta annamme seuraavan esimerkin:

Esimerkki 4.2.13. Olkoon $z, w \in \mathbb{C}$ ja $z \neq w$. Määritellään segmentti

$$[z,w](t) = tw + (1-t)z, \qquad t \in [0,1].$$

Sitten $[z,w]'(t) = w - z$ kaikilla $t \in [0,1]$, ja siten

$$\ell([z,w]) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^1 |[z,w]'(t)|\,dt = \int_0^1 |w-z|\,dt = |w-z|.$$

Joten määrittelemämme "pituus" antaa odotetun tuloksen (ainakin) segmenteille.

Seuraava seuraus Korollaarista 4.2.12 on usein hyödyllinen:

Korollaari 4.2.14. *Olkoon* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *paloittain* C^1*, ja olkoot* $f_k, f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ *jatkuvia funktioita siten, että* $f_k \to f$ *tasaisesti* γ^**:ssa, kun* $k \to \infty$*. Silloin,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\gamma f_k(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Todistus. Korollaarin 4.2.12 nojalla meillä on

$$\left|\int_\gamma f_k(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma (f_k - f)(z)\,dz\right| \le \|f_k - f\|_{L^\infty(\gamma^*)} \cdot \ell(\gamma).$$

Tässä $\ell(\gamma) < \infty$, ja $\|f_k - f\|_{L^\infty(\gamma^*)} \to 0$ oletuksen perusteella, kun $k \to \infty$. □

Tässä on joitain muita kompleksisten polkuintegraalien perusominaisuuksia:

Propositio 4.2.15. *Olkoon* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *paloittain* C^1, *ja olkoon* $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ *jatkuva. Silloin,*

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz. \tag{4.2.5}$$

Olkoon $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ *paloittain* C^1*-reparametrisaatio* γ*:sta. Silloin,*

$$\int_\eta f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Oletetaan, että $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *ja* $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ *ovat osittain* C^1*-polkuja, ja* $\alpha(b) = \beta(c)$*, jotta yhdistetty polku* $\alpha\star\beta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *on määritelty. Oletetaan, että* $f\colon (\alpha\star\beta)^* \to \mathbb{C}$ *on jatkuva. Silloin,*

$$\int_{\alpha\star\beta} f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz. \tag{4.2.6}$$

Kaavaan (4.2.5) liittyen on huomattava, että poluilla γ ja $\overleftarrow{\gamma}$ on sama jälki γ^*. Täten kompleksisen polkuintegraalin arvo γ:lla ei riipu pelkästänä jäljestä γ^*!

Proposition 4.2.15 todistus. Todistamme väitteen reparametrisoinnista ja jätämme muut lausunnot harjoitustehtäviksi. Oletimme, että η on paloittain C^1-reparametrisaatio γ:sta. Tämä tarkoittaa, että on olemassa paloittain C^1 bijektio $\rho\colon [c,d] \to [a,b]$ siten, että $\rho(c) = (a)$, $\rho(d) = b$, ja $\eta = \gamma\circ\rho$. Käytämme kompleksisen polkuintegraalin määritelmää:

$$\int_\eta f(z)\,dz \overset{\text{def.}}{=} \int_c^d f(\eta(t))\eta'(t)\,dt = \int_c^d f(\gamma(\rho(t)))\gamma'(\rho(t))\rho'(t)\,dt. \tag{4.2.7}$$

Tässä käytimme kaavaa $\eta'(t) = \gamma'(\rho(t))\rho'(t)$, joka on kaavassa (4.1.1). Seuraavaksi käytämme muuttujanvaihtokaavaa, joka on tuttu Riemann-integraalien teoriasta:

$$\int_c^d g(\rho(t))\rho'(t)\,dt = \int_a^b g(s)\,ds,$$

missä $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva. Sovellamme tätä kaavaa (paloittain) jatkuvalle funktiolle $g(s) := f(\gamma(s))\gamma'(s)$, tai tarkemmin ottaen sen reaaliosille ja imaginaariosille erikseen. Johtopäätös on, että

$$(4.2.7) = \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds \overset{\text{def.}}{=} \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Tämä on mitä väitimme. □

4.3. Primitiivit

Kerrataan *analyysin peruslause*: jos $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, ja $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on differentioituva funktio, joka täyttää ehdon $G'(t) = g(t)$ kaikilla $t \in [a,b]$, niin

$$G(b) - G(a) = \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b G'(t)\,dt. \tag{4.3.1}$$

Todistamme seuraavassa version tästä lauseesta kompleksisille polkuintegraaleille.

Määritelmä 4.3.1. Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin, ja olkoon $f\colon U \to \mathbb{C}$ kuvaus. Sanomme, että $F\colon U \to \mathbb{C}$ on *f:n primitiivi U:ssa*, jos F on analyyttinen U:ssa, ja $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in U$.

Jos F on primitiivi f:lle ja $c \in \mathbb{C}$, niin selvästi myös $F + c$ on primitiivi f:lle. Käänteinen päätelmä pätee, jos U on yhtenäinen:

Propositio 4.3.2. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja yhtenäinen, ja olkoon $f\colon U \to \mathbb{C}$ kuvaus. Oletetaan, että $F_1, F_2\colon U \to \mathbb{C}$ ovat molemmat f:n primitiivejä. Silloin on olemassa vakio $c \in \mathbb{C}$ siten, että $F_1 = F_2 + c$.*

Todistus. Huomaa, että $G := F_1 - F_2\colon U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, ja $G'(z) = 0$ kaikilla $z \in U$. Siksi G on vakio U:ssa Korollaarin 3.3.1 perusteella. □

Esimerkki 4.3.3. Kaikki primitiivit funktiolle $z \mapsto e^z$ ovat muotoa $F(z) = e^z + c$, $c \in \mathbb{C}$. Kaikki primitiivit funktiolle $w \mapsto 1/w$ joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ovat muotoa $G(w) = \mathrm{Log} w + c$, $c \in \mathbb{C}$. Nämä seuraavat siitä, että $z \mapsto e^z$ ja $w \mapsto \mathrm{Log}\, w$ ovat esimerkkejä primitiiveistä (Lauseen **??** nojalla), ja toisaalta avoimet joukot $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ovat yhtenäisiä.

Näytämme seuraavaksi kaavan (4.3.1) polkuintegraaliversion, jota voitaisiin kutsua "kompleksisten polkuintegraalien peruslauseeksi":

Lause 4.3.4 (Polkuintegraalit ja primitiivit). *Oletetaan, että $U \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f\colon U \to \mathbb{C}$ on jatkuva. Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to U$ paloittain C^1-polku.*

Jos F on primitiivi f:lle joukossa U, niin

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Erityisesti, jos γ on suljettu polku, niin $\gamma(a) = \gamma(b)$, joten

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Huomautus 4.3.5. Muista, että päälogaritmi Log on primitiivi funktiolle $z \mapsto 1/z$ joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Siksi, jos $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ on suljettu paloittain C^1-polku, voimme päätellä Lauseesta 4.3.4, että

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \operatorname{Log}\gamma(b) - \operatorname{Log}\gamma(a) = 0.$$

Toisaalta tämä ei päde polulle $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, koska γ^* ei sisälly$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Itse asiassa tälle polulle $\gamma(t)$ laskimme

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0 = \operatorname{Log}\gamma(2\pi) - \operatorname{Log}\gamma(0).$$

Toisaalta, joukossa $(-\infty, 0]$ ei ole mitään erityistä. Samaa argumenttia käyttäen saamme $\int_\gamma dz/z = 0$ jokaiselle suljetulle paloittain C^1-polulle γ, jolla $\gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus \ell_v$ (mielivaltaiselle $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), missä $\ell_v = \{tv : t \geq 0\}$. Syy: joukossa $\mathbb{C} \setminus \ell_v$ on olemassa logaritmin haara (harjoitustehtävä).

Seuraava lemma tarvitaan Lauseen 4.3.4 todistamiseen:

Lemma 4.3.6. *Olkoon $F\colon U \to \mathbb{C}$ analyyttinen ja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ C^1-polku. Silloin*

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t), \qquad t \in [a,b],$$

missä vasen puoli on kuvauksen $F \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ reaaliderivaatta.

Todistus. Laskeaksemme $(F \circ \gamma)'(t)$ käytämme reaalimuuttujan ketjusääntöä:

$$(F \circ \gamma)'(t) = DF(\gamma(t))\gamma'(t),$$

Tämä on mahdollista, koska kompleksisesta differentioituvuudesta seuraa reaalinen differentioituvuus (joten $DF(z)$ on olemassa kaikilla $z \in U$). Toisaalta, koska F on kompleksidifferentioituva, matriisi $DF(\gamma(t))$ vastaa matriisia $M_{F'(\gamma(t))}$, joka liittyy kompleksilukuun $F'(\gamma(t))$, kuten kaavassa (3.2.5) on huomattu. Siksi $(F \circ \gamma)'(t) = M_{F'(\gamma(t))}\gamma'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$, kuten väitetty. $\square$

Olemme sitten valmiita todistamaan Lauseen 4.3.4.

LAUSEEN 4.3.4 TODISTUS. Oletetaan ensin, että $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on C^1-polku, ei pelkästään paloittain C^1. Primitiivi $F\colon U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, joten edellinen lemma implikoi

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t), \qquad t \in [a,b].$$

Seuraavaksi

$$\int_\gamma f(z)\,dz \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

missä viimeinen yhtälö sovelsi analyysin peruslausetta (4.3.1) Riemann-integroitavalle (jopa jatkuvalle) funktiolle $g := (F \circ \gamma)'\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ja sen reaaliselle primitiiville $G := F \circ \gamma$ (tai tarkemmin sanottuna näiden funktioiden reaali- ja imaginaariosille erikseen).

Lopuksi käsitellään paloittain C^1-polkujen tapaus. Jos $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on paloittain C^1, voimme kirjoittaa sen muodossa $\gamma = \gamma_1 \star \cdots \star \gamma_n$ missä jokainen $\gamma_j\colon [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ on C^1-polku, $a = t_0 < \ldots < t_n = b$, ja $\gamma_j(t_j) = \gamma_{j-1}(t_j)$ kun $1 \leq j \leq n$. Tällöin

$$\int_\gamma f(z)\,dz \stackrel{(4.2.6)}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n [F(\gamma_j(t_j)) - F(\gamma_j(t_{j-1}))],$$

ensimmäisen osan todistuksen soveltamalla erikseen polkuihin γ_j. Oikeanpuoleinen summa "teleskooppaa" ja sen arvo on

$$F(\gamma_n(t_n)) - F(\gamma_1(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Tämä päättää todistuksen. $\square$

Kirjaamme seuraavan korollaarin:

KOROLLAARI 4.3.7. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin, $f\colon U \to \mathbb{C}$ analyyttinen ja f' jatkuva. Silloin jos $z, w \in U$ ja myös segmentti, joka yhdistää z, w, sisältyy joukkoon U, pätee*

$$f(w) - f(z) = \int_{[z,w]} f'(\zeta)\,d\zeta.$$

Tässä $[z,w](t) := tw + (1-t)z$ kun $t \in [0,1]$.

TODISTUS. Funktio f on primitiivi f':lle, joten Lauseen 4.3.4 mukaan saamme

$$\int_{[z,w]} f'(\zeta)\,d\zeta = f([z,w](1)) - f([z,w](0)) = f(w) - f(z).$$

Tämä on se, mitä väitimme. $\square$

Lausetta 4.3.4 voidaan käyttää osoittamaan, että tietyillä kuvauksilla **ei** ole primitiivejä:

Esimerkki 4.3.8. Kuvauksella $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=1/z$ ei ole **yhtään** primitiiviä $F\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$. Tämän näemme, kun otamme $\gamma(t):=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Jos primitiivi F olisi olemassa, niin laskumme (4.2.2) ja Lause 4.3.4 olisivat ristiriidassa keskenään:

$$2\pi i=\int_\gamma f(z)\,dz=F(\gamma(0))-F(\gamma(2\pi))=0.$$

On kuitenkin korostettava, että primitiivien olemassaolo riippuu suuresti joukon valinnasta: esimerkiksi $z\mapsto 1/z$ **on** primitiivi jokaisessa joukossa $\mathbb{C}\setminus\ell_v$ (katso Huomautus 4.3.5). Itse asiassa primitiivi saadaan logaritmin haaran avulla joukossa $\mathbb{C}\setminus\ell_v$.

Tehtävä 4.3. Funktio $z\mapsto\bar z$ ei ole primitiivi missään avoimessa joukossa $U\subset\mathbb{C}$.

Seuraava Lauseen 4.3.4 seuraus tarvitaan myöhemmin:

Korollaari 4.3.9. *Olkoon $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ suljettu paloittain C^1-polku ja $p(z)=a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0$ polynomi. Tällöin*

$$\int_\gamma p(z)\,dz=0.$$

Todistus. Määritellään

$$P(z):=\tfrac{a_n}{n+1}z^{n+1}+\tfrac{a_{n-1}}{n}z^n+\ldots+\tfrac{a_1}{2}z^2+a_0z$$

Korollaarin 3.1.8 mukaan

$$P'(z)=p(z).$$

Siksi polynomilla p on primitiivi P koko tasossa $\mathbb{C}$, joten Lauseen 4.3.4 perusteella tulos seuraa. $\square$

Viimeiseksi, kirjaamme seurauksen Lauseesta 4.3.4:

Propositio 4.3.10 (Osittaisintegrointi). *Olkoon $U\subset\mathbb{C}$ avoin ja $\gamma\colon[a,b]\to U$ paloittain C^1-polku. Oletetaan, että $f,g\colon U\to\mathbb{C}$ ovat analyyttisiä. Oletetaan lisäksi, että f',g' ovat jatkuvia. Tällöin seuraa, että*

$$\int_\gamma f(z)g'(z)\,dz=[f(\gamma(b))g(\gamma(b))-f(\gamma(a))g(\gamma(a))]-\int_\gamma g(z)f'(z)\,dz.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Yhteenveto osiosta 4. Tässä on luettelo keskeisistä aiheista tässä osiossa:

- Paloittain C^1-polut.
- Käänteispolku $\overleftarrow{\gamma}$ ja yhdistetty polku $\gamma\star\eta$.
- Polkujen uudelleenparametrisointi.
- Kompleksisen polkuintegraalin ja kaarenpituusintegraalin määritelmät.

- Esimerkki 4.2.6: Funktion $1/z$ polkuintegraali ympyräpolulla.
- Polkuintegraalit yli polkujen $\overleftarrow{\gamma}$, $\gamma \star \eta$, ja γ:n uudelleenparametrisaatiot.
- Polkuintegraalin arvioiminen kaarenpituusintegraalin avulla.
- Primitiivit ja "peruslause kompleksisille polkuintegraaleille" (Lause 4.3.4).

LUKU 5

Cauchyn lause ja sovelluksia

Kurssin loppuosassa käydään läpi useita klassisen kompleksianalyysin perustuloksia. Ne perustuvat kaikki melko viattoman näköiseen väitteeseen, joka tunnetaan Cauchyn lauseena (itse asiassa näemme useita eri versioita Cauchyn lauseesta). Lause sanoo (ks. Lause 5.1.4), että jos $U \subset \mathbb{C}$ on konveksi avoin joukko ja $f\colon U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, niin

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \tag{5.0.1}$$

jokaiselle suljetulle paloittain C^1-polulle joukossa U. Kohtuullisella vaivalla tämä perustava tosiasia johtaa – muun muassa – siihen, että jokainen analyyttinen funktio, joka on määritelty mielivaltaisessa avoimessa joukossa, on äärettömän monta kertaa derivoituva! Itse asiassa tässä on kaavio kurssin loppuosasta:

$$\text{Cauchyn lause} \Longrightarrow \quad \text{Cauchyn integraalikaava}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Analyyttisten funktioiden derivaatat ovat analyyttisia} \\ \text{Cauchyn integraalikaava derivaatoille (CIFD)} \\ \text{Keskiarvo- ja maksimimoduuliperiaate} \Longrightarrow \text{Schwarzin lemma} \end{cases}$$

$$\text{(CIFD)} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Moreran lause} \Longrightarrow \quad \text{Analyyttinen jatke pisteeseen} \\ \text{Cauchyn estimatet} \Longrightarrow \text{Liouvillen lause} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Algebran peruslause} \\ . \end{cases} \end{cases}$$

Kurssia kertausta varten on suositeltavaa palata tähän hahmotelmaan ja yrittää tiivistää nämä tulokset – ja niiden seuraukset – itselleen! “Yhteenvetokappaleita”ei enää ole, koska yllä olevassa hahmotelmassa on jo yhteenveto viimeisen kappaleen asioista.

5.1. Cauchyn lause konvekseille joukoille

Ennen kuin todistamme Cauchyn lauseen (5.0.1) yleisessä tapauksessa, esitämme ensin version, jossa $\gamma = \partial\triangle$ on *kolmio*, nimittäin polku muotoa

$$\partial\triangle := [a, b] \star [b, c] \star [c, a]. \tag{5.1.1}$$

Tässä $[z,w](t) := tw + (1-t)z$ oli "segmenttipolku" joka yhdistää z:n ja w:n. Huomaa, että

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz \overset{(4.2.6)}{=} \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz.$$

Käytämme myös merkintää $\triangle := \triangle(a,b,c) \subset \mathbb{C}$ kolmiolle (ei vain reunalle), jonka kärkipisteet ovat a, b ja c. Näin ollen jälki $(\partial\triangle)^*$ vastaa $\triangle$:n reunaa, ja $\partial\triangle$ "parametrisoi" tämän reunan.

Lause 5.1.1 (Cauchyn lause kolmioille). *Olkoot $a,b,c \in \mathbb{C}$ ja olkoon $\partial\triangle := \partial\triangle(a,b,c)$ kaavan (5.1.1) polku. Oletetaan, että $U \subset \mathbb{C}$ on avoin joukko, jolle $\triangle \subset U$, ja $w_0 \in U$. Oletetaan, että f on jatkuva joukossa U ja analyyttinen joukossa $U \setminus \{w_0\}$. Tällöin*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

Huomautus 5.1.2. "Erityinen piste" $w_0 \in U$ voi vaikuttaa tarpeettomalta yksityiskohdalta, mutta se on välttämätön, kun todistetaan *Cauchyn integraalikaava* (Lause 5.2.13).

Lauseen 5.1.1 todistus. Oletamme, että kolmio $\triangle$ on degeneroitumaton eli pisteet $\{a,b,c\}$ eivät ole samalla suoralla. Väite pätee myös tällaisessa tapauksessa ja on paljon helpompi todistaa; mieti tätä itse!

Aloitamme erikoistapauksesta, jossa $w_0 \notin \triangle$. Olkoot a', b', c' segmenttien $[a,b]$, $[b,c]$ ja $[c,a]$ keskipisteet, ks. Kuva 1. Nämä muodostavat 4 uutta kolmiota $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4 \subset \triangle$. Lisäksi

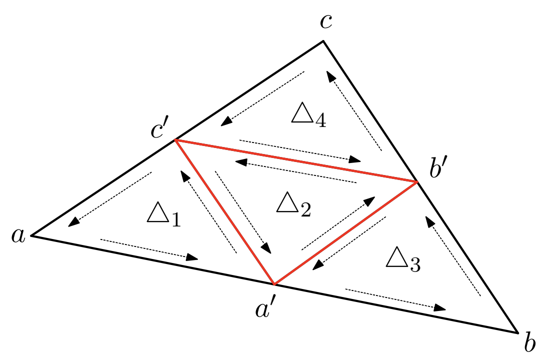
$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\triangle_j} f(z)\,dz. \tag{5.1.2}$$

Tämä seuraa siitä, että jos $[z,w]$ on reunana yhdessä pienemmistä kolmioista, joka leikkaa $\triangle$:n sisäosan (punainen polku Kuvassa 1), niin myös $\overleftarrow{[z,w]}$ on reunana toisessa pienemmistä kolmioista, ja näiden kahden reunan integraalit kumoavat toisensa. Näin ollen ainoastaan $\triangle$:n reunojen yli kulkevat reunat eivät kumoudu muilla reunoilla, ja niiden summa antaa takaisin integraalin yli $\partial\triangle$:n.

Kaavasta (5.1.2) seuraa, että

$$\left|\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz\right| \le 4 \max_{1\le j\le 4} \left|\int_{\partial\triangle_j} f(z)\,dz\right|.$$

Olkoon $\triangle^1 \in \{\triangle_1, \dots, \triangle_4\}$ kolmio, joka saavuttaa maksimin. Kiinnitämme huomion $\triangle^1$:een ja toistamme "jakotempun" sen sisällä: jaamme $\triangle^1$:n 4 pienemmäksi kolmioksi $\triangle^1_1, \dots, \triangle^1_4$. Toistaen edellä mainitun päättelyn voimme



KUVA 1. Kolmion $\triangle$ jakaminen 4 pienemmäksi kolmioksi $\triangle_1, \ldots, \triangle_4$ ja miten polkujen $\partial\triangle_1, \ldots, \partial\triangle_4$:n "sisäiset"segmentit kumoavat toisensa.

löytää yhden kolmion, jolle pätee

$$\left| \int_{\partial\triangle} f(z)\, dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\triangle^1} f(z)\, dz \right| \leq 16 \left| \int_{\partial\triangle^1_j} f(z)\, dz \right|.$$

Nyt jatkamalla induktiivisesti voimme löytää jonon kolmioita $\triangle =: \triangle^0 \supset \triangle^1 \supset \ldots$ joille pätee

$$\left| \int_{\partial\triangle} f(z)\, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\triangle^n} f(z)\, dz \right|, \qquad n \geq 0. \tag{5.1.3}$$

Kun $n \to \infty$, kolmiot $\triangle_n$ pienenevät ja pienenevät: itse asiassa

$$\text{pituus}(\partial\triangle^n) = 2^{-n}\text{pituus}(\partial\triangle), \qquad n \geq 0. \tag{5.1.4}$$

Lisäksi kolmiot $\triangle^n$ "konvergoivat"yksikäsitteiseen pisteeseen $z_0 \in \triangle$. Tarkemmin sanottuna Cantorin leikkauslauseen (Lause **??**) mukaan

$$\bigcap_{n \geq 0} \triangle^n = \{z_0\} \subset \triangle.$$

Funktio f on differentioituva pisteessä z_0, joten annetulle $\epsilon > 0$ löytyy säde $r > 0$ siten, että

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|, \qquad z \in D(z_0, r). \tag{5.1.5}$$

Erityisesti arvio (5.1.5) pätee kaikilla $z \in \triangle^n$, kun $n \ge n_\epsilon$ on tarpeeksi suuri. Kun $n \ge n_\epsilon$, meillä on siten

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\triangle^n} f(z)\,dz \right| &\overset{\text{Kor. 4.3.9}}{=} \left| \int_{\partial\triangle^n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)]\,dz \right| \\ &\overset{\text{Prop. 4.2.10}}{\le} \int_{\partial\triangle^n} \epsilon|z-z_0|\,|dz| \le \epsilon(\text{pituus}(\partial\triangle^n))^2 \\ &\overset{(5.1.4)}{=} \epsilon 4^{-n}(\text{pituus}(\partial\triangle))^2. \end{aligned}$$

Ensimmäinen askel käytti sitä tosiasiaa, että polkuintegraali polynomista $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$ polun $\partial\triangle^n$ yli on nolla, kun taas toinen askel käytti arviota kaarenpituusintegraalin avulla. Kolmas askel käytti tietoa

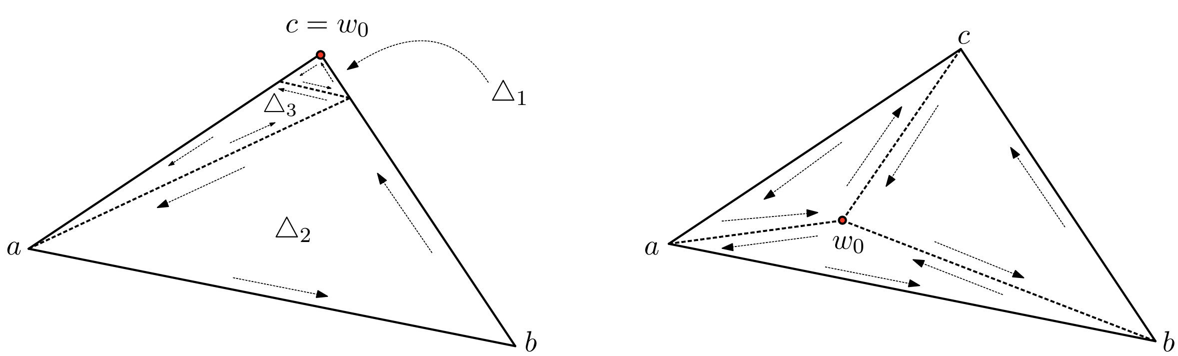
$$|z-z_0| \le \operatorname{diam}(\triangle^n) \le \ell(\partial\triangle^n), \qquad \overset{c}{z} \in \triangle^n.$$

Kun saatu arvio yhdistetään (5.1.3):n kanssa, saadaan

$$\left| \int_{\partial\triangle} f(z)\,dz \right| \le 4^n \left| \int_{\partial\triangle^n} f(z)\,dz \right| \le \epsilon \cdot (\text{pituus}(\partial\triangle))^2.$$

Kun $\epsilon \to 0$, lause on todistettu erikoistapauksessa $w_0 \notin \triangle$.

Olkoon lopuksi $w_0 \in \triangle$. On kaksi erillistä tapausta, jotka on huomioitava, molemmat esitetty Kuvassa 2: joko w_0 on $\triangle$:n kärkipiste, tai sitten se ei ole. Jos w_0 on kärkipiste, "eristämme" sen pieneksi kolmioksi $\triangle_1 \subset \triangle$.



Kuva 2. Erityistapaukset, joissa (i) w_0 on $\triangle$:n kärkipiste ja (ii) missä $w_0 \in \triangle$ mutta w_0 ei ole kärkipiste.

Tällöin muodostamme myös kaksi muuta kolmiota $\triangle_2, \triangle_3 \subset \triangle$ siten, että

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\triangle_2} f(z)\,dz + \int_{\partial\triangle_3} f(z)\,dz. \tag{5.1.6}$$

Huomaa, että kolmiot $\triangle_2, \triangle_3$ eivät sisällä "erityispisteitä": f on analyyttinen $\triangle_2 \cup \triangle_3$:n ympäristössä. Siksi kaksi jälkimmäistä termiä (5.1.6) ovat nollia ensimmäisen osan todistuksen perusteella. Ensimmäistä termiä varten arvioimme polkuintegraalia kaarenpituusintegraalilla:

$$\left| \int_{\partial \triangle_1} f(z)\, dz \right| \le \|f\|_{L^\infty(\triangle)} \mathrm{pituus}(\partial \triangle_1).$$

Koska f on jatkuva $\triangle$:ssa, pätee $\|f\|_{L^\infty(\triangle)} < \infty$. Toisaalta $\partial\triangle_1$:n pituutta voidaan pienentää haluamallemme tasolle. Tämä tarkoittaa, että $\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$.

Lopuksi käsitellään tapaus, jossa $w_0 \in \triangle$ ei ole kärkipiste. Muodostamme uudet kolmiot $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3 \subset \triangle$ siten, että w_0 on yhteinen kärkipiste kolmiolle $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$, ja (5.1.6) pätee (ks. Kuva 2, ja mieti mitä tapahtuisi, jos w_0 olisi $\triangle$:n reunalla). Nyt "kärkipistetapauksen" avulla, jonka käsittelimme juuri yllä, kaikki kolme termiä (5.1.6) oikealla puolella ovat nollia. Siksi $\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$ myös tässä tapauksessa, ja todistus on valmis. ☐

Voimme välittömästi yleistää edellisen teoreeman kaikkiin suljettuihin paloittain C^1-polkuihin γ, mutta vain sillä oletuksella, että f on analyyttinen **konveksissa avoimessa joukossa**, joka sisältää jäljen γ^*.

Määritelmä 5.1.3. Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *konveksi*, jos jokaiselle $z, w \in A$, segmentti $[z, w]^* = \{\ (1-t)z + tw\ :\ t \in [0, 1]\}$ sisältyy A:han.

Lause 5.1.4 (Cauchyn lause konveksissa joukossa). *Oletetaan, että $U \subset \mathbb{C}$ on **konveksi** avoin joukko, $w_0 \in U$, f on jatkuva U:ssa ja analyyttinen $U \setminus \{w_0\}$. Silloin f:llä on primitiivi U:ssa.*

Seurauksena (ja Lauseen 4.3.4 mukaan), jos $\gamma\colon [a, b] \to U$ on suljettu paloittain C^1-polku, niin

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Todistus. Määrittelemme primitiivin $F\colon U \to \mathbb{C}$ seuraavalla eksplisiittisellä kaavalla. Valitaan $a \in U$ mielivaltaisesti, ja asetetaan

$$F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta, \qquad z \in U.$$

Integraali on hyvin määritelty, koska $[a, z]^* \subset U$ konveksisuuden vuoksi. Huomaamme myös, että

$$F(z) = -\int_{\overleftarrow{[a,z]}} f(\zeta)\, d\zeta = -\int_{[z,a]} f(\zeta)\, d\zeta, \qquad z \in U. \tag{5.1.7}$$

Väitämme sitten, että F on kompleksiderivoituva kaikilla $z \in U$ ja että $F'(z) = f(z)$. Valitaan eri pisteet $z, w \in U$, ja määritellään kolmio

$$\partial\triangle := [a, w] \star [w, z] \star [z, a],$$

jonka jälki sisältyy U:hun konveksisuuden vuoksi. Itse asiassa koko kolmio $\triangle$ sisältyy myös U:han – kuten tarvitaan Lauseen 5.1.1 soveltamiseksi. Tällöin

$$F(w)-F(z) \overset{(5.1.7)}{=} \int_{[a,w]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,a]} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial\triangle} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Oikealla oleva ensimmäinen termi häviää Lauseen 5.1.1 perusteella, joten voimme päätellä, että

$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} = -\frac{1}{w-z}\int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{z-w}\int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Toisaalta, on yksinkertaista tarkistaa, että

$$\frac{1}{z-w}\int_{[w,z]} c\, d\zeta = c, \qquad c \in \mathbb{C},$$

joten erityisesti $c := f(z)$:lle pätee

$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) = \frac{1}{z-w}\int_{[w,z]} [f(\zeta)-f(z)]\, d\zeta.$$

Koska f on jatkuva z:ssä, jokaiselle $\epsilon > 0$:lle on olemassa $\delta > 0$, jolla $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ aina kun $|\zeta - z| < \delta$. Tämä pätee erityisesti kaikille $\zeta \in [w,z]^*$, jos $|w-z| < \delta$. Siksi kun $|w-z| < \delta$, saamme arvion

$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|z-w|}\int_{[w,z]} |f(\zeta)-f(z)|\, |d\zeta| \leq \|f-f(z)\|_{L^\infty([w,z])} \leq \epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, tämä osoittaa, että

$$\lim_{w\to z}\frac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z).$$

Tämä päättää todistuksen. □

Huomautus 5.1.5. Onko konveksiuden oletus tarpeellinen Lauseessa 5.1.4? Vastaus on "kyllä ja ei". Vastaus on "ei" siinä mielessä, että on olemassa yleisempi lause, *globaali Cauchyn lause*, joka korvaa konveksiuden aidosti heikommalla oletuksella. Tämä lause käsitellään *Kompleksianalyysi 2*:ssa.

Vastaus on "kyllä" siinä mielessä, että konveksiuden oletusta ei voida yksinkertaisesti poistaa. Esimerkiksi ajatellaan ei-konveksia aluetta $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ja olkoon $\partial\triangle \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kolmiomainen polku, joka ympäröi origon: siten kolmio $\triangle$ ei sisälly joukkoon $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin käy ilmi, että

$$\int_{\partial\triangle} \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

vaikka $z \mapsto 1/z$ on analyyttinen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:ssa. On tärkeää pohdiskella, miksi tämä seikka ei ole ristiriidassa Lauseen 5.1.1 kanssa, ja miksi Lauseen 5.1.1 todistus ei toimi tässä tilanteessa.

Suljemme tämän osan seuraavalla korollaarilla Lauseen 5.1.4 todistukselle:

KOROLLAARI 5.1.6. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin, ja oletetaan, että $f\colon U \to \mathbb{C}$ on jatkuva funktio, joka toteuttaa*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0, \qquad \triangle \subset U. \tag{5.1.8}$$

Tällöin f:llä on primitiivi jokaisessa avoimessa kiekossa $D \subset U$ (tai yleisemmin jokaisessa konveksissa avoimessa joukossa $V \subset U$).

TODISTUS. Olkoon $D \subset U$ kiekko. Silloin D on konveksi avoin joukko, ja (5.1.8) pätee kaikille kolmioille $\triangle \subset D$. Nämä olivat kaikki ominaisuudet, joita tarvitsimme Lauseen 5.1.4 todistuksessa päätelläksemme, että f:llä on primitiivi D:ssä. $\square$

HUOMAUTUS 5.1.7. Olkoon $f\colon U \to \mathbb{C}$ jatkuva, missä $U \subset \mathbb{C}$ on konveksi ja avoin. Ajatellaan seuraavia kolmea ominaisuutta:
(1) f on analyyttinen joukossa U.
(2) $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$ kaikille kolmioille $\triangle \subset U$.
(3) f:llä on primitiivi joukossa U.
Mitkä ovat implikaatiot ominaisuuksien (1), (2) ja (3) välillä? Lause 5.1.1 näyttää, että (1) $\Longrightarrow$ (2), ja Korollaari 5.1.6 näyttää, että (2) $\Longrightarrow$ (3). Käy ilmi, että myös (3) $\Longrightarrow$ (1), ks. Lause 5.3.1 (sovellettuna primitiiviin). Joten (1) – (3) ovat ekvivalentteja konveksille avoimille joukoille.

Joukon U konveksisuutta käytettiin sekä implikaatioissa (1) $\Longrightarrow$ (2) että (2) $\Longrightarrow$ (3), mutta käänteiset implikaatiot pätevät kaikille avoimille $U \subset \mathbb{C}$: nimittäin (3) $\Longrightarrow$ (2) Lauseen 4.3.4 perusteella, ja implikaatio (2) $\Longrightarrow$ (1) tunnetaan nimellä *Moreran lause*, joka todistetaan pian.

5.2. Cauchyn integraalilause

Ensimmäinen sovelluksemme Cauchyn lauseelle (Lause 5.1.4) on seuraava “esityskaava”analyyttisille funktioille, jotka on määritelty konveksissa avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in U,$$

missä $r > 0$ on niin pieni, että $D(z,r) \subset U$, ja $\partial D(z,r)$ viittaa polkuun $\gamma(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Tämä kaava, ja siitä johdettu yleisempi versio, joka on kirjattu Lauseeseen 5.2.13, tunnetaan nimellä *Cauchyn integraalilause*. Se avaa oven (Luvussa 5.3) vielä vahvempien ominaisuuksien osoittamiseen analyyttisille funktioille.

Osoittaaksemme Cauchyn integraalilauseen tarvittavassa yleisyydessä, aloitamme *kierrosluvun* määritelmästä.

Määritelmä 5.2.1 (Kierrosluku). Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ suljettu paloittain C^1-polku, ja olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. *Polun γ kierrosluku pisteen z ympäri* määritellään seuraavasti:

$$n_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Esimerkki 5.2.2. Olkoon $\gamma_k\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ ympyräpolku $\gamma_k(t) := z_0 + re^{ikt}$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Esimerkissä 4.2.6 laskimme, että

$$n_{\gamma_k}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} = k. \tag{5.2.1}$$

Näin ollen kierrosluku $n_{\gamma_k}(z_0)$ vastaa intuitiota siitä, että γ_k "kiertää $|k|$ kertaa ympäri pisteen z_0". Kierrosluvun merkki kertoo meille, tapahtuuko "kiertyminen" myötäpäivään (tapaus $k < 0$) vai vastapäivään (tapaus $k > 0$).

Seuraava kierroslukujen ominaisuus on yksinkertainen mutta hyödyllinen:

Propositio 5.2.3. *Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ja $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ suljettuja paloittain C^1-polkuja siten, että $\gamma(b) = \eta(c)$. Tällöin,*

$$n_{\gamma\star\eta}(z) = n_\gamma(z) + n_\eta(z) \quad \text{ja} \quad n_\gamma(z) = -n_{\overleftarrow{\gamma}}(z)$$

kaikille $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma^* \cup \eta^*]$ (tai $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ jälkimmäistä väitettä varten).

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Hämmästyttävästi käy ilmi, että kierrosluku on aina kokonaisluku:

Lause 5.2.4. *Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ suljettu paloittain C^1-polku. Tällöin kuvaus $z \mapsto n_\gamma(z)$, määriteltynä $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$:ssa, on jatkuva ja kokonaislukuarvoinen: $n_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Tarvitsemme seuraavan lemman todistusta varten:

Lemma 5.2.5. *Olkoon $\eta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on derivoituva kaikissa pisteissä $t \in [a,b] \setminus X$, missä $X \subset [a,b]$ on äärellinen. Jos $\eta'(t) = 0$ kaikilla $t \in [a,b] \setminus X$, niin η on vakio, ja erityisesti $\eta(b) = \eta(a)$.*

Todistus. Koska X on äärellinen, voimme kirjoittaa joukon $(a,b) \setminus X$ yhdisteenä erillisiä avoimia välejä $I_1, \dots, I_n$. Oletuksista seuraa, että η on vakio jokaisella välillä erikseen, eli $\eta \equiv c_j$ väli I_j:llä. Jatkuvuuden vuoksi, jos I_j, I_{j+1} ovat peräkkäisiä välejä ja $t \in \overline{I}_j \cap \overline{I}_{j+1}$, niin $c_j = \eta(t) = c_{j+1}$. Tästä seuraa, että kaikki vakiot c_j ovat itse asiassa samat, ja jatkuvuuden perusteella ne ovat yhtä suuret, ts. $c_1 = \eta(a)$. □

Lauseen 5.2.4 todistus. Kierrosluvun jatkuvuus on melko selvää määritelmästä: jos $(z_k) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ on jono, joka suppenee pisteeseen $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, niin

$$\lim_{k\to\infty} n_\gamma(z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_k} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = n_\gamma(z). \tag{5.2.2}$$

Siis n_γ täyttää jatkuvuuden kriteerin jonojen avulla. Täytyy vielä osoittaa, että raja-arvon ja integroinnin vaihto (5.2.2) on oikeutettua: on tarkistettava, että funktiot $\zeta \mapsto f_k(\zeta) := (\zeta - z_k)^{-1}$ suppenevat tasaisesti γ^*:ssa funktioon $\zeta \mapsto f(\zeta) := (\zeta - z)^{-1}$, ja sitten sovellettava Seurausta 4.2.14. Tasaisen suppenemisen tarkistamiseksi γ^*:ssa huomataan, että $\operatorname{dist}(z, \gamma^*) =: r > 0$, joten myös $\operatorname{dist}(z_k, \gamma^*) \geq r/2$ kaikilla riittävän suurilla $k \in \mathbb{N}$.

Näytämme sitten, että n_γ on kokonaisluku. Muistamme Proposition 1.5.7:n, jonka mukaan $e^\alpha = 1$ jos ja vain jos $\alpha \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Näin ollen todistaaksemme, että $n_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$, riittää näyttää, että

$$e^{2\pi i n_\gamma(z)} = 1, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

Lisäksi, jos kirjoitamme kierrosluvun määritelmän integraalina, tämä väite on sama kuin $\varphi(b) = 1$, missä

$$\varphi(t) := \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds\right), \qquad t \in [a, b]. \tag{5.2.3}$$

(Tässä merkintä “z”on jätetty pois.) Osoittaaksemme kaavan (5.2.3), aloitetaan huomaamalla, että

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, dz\right) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\varphi(t),$$

tai vaihtoehtoisesti

$$\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \gamma'(t)\varphi(t) = 0 \tag{5.2.4}$$

kaikille $t \in [a, b]$, missä γ on derivoituva. Koska γ on paloittain C^1, tämä on totta kaikille $t \in [a, b] \setminus X$, missä $X \subset [a, b]$ on äärellinen joukko. Nyt kaava (5.2.4) osoittaa, että $\eta(t) := \varphi(t)/(\gamma(t) - z)$ määrittelee jatkuvan kuvauksen $[a, b] \to \mathbb{C}$, joka derivoituvan joukon X ulkopuolella, ja jolle pätee

$$\eta'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \gamma'(t)\varphi(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0, \qquad t \in [a, b] \setminus X.$$

Lemma 5.2.5 (jota sovelletaan erikseen reaaliosaan ja imaginaariosaan) osoittaa, että

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z} = \eta(b) = \eta(a) = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{1}{\gamma(a) - z},$$

huomioonottaen, että $\varphi(a) = e^0 = 1$ määritelmästä (5.2.3). Nyt tarvitaan vain käyttää oletusta siitä, että γ on suljettu polku, joten $\gamma(b) = \gamma(a)$:

$$\varphi(b) = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = \frac{\gamma(a) - z}{\gamma(a) - z} = 1,$$

niin kuin haluttiin osoittaa. Todistus on valmis. □

Huomautus 5.2.6. Lauseen 5.2.4 todistus oli hieman taianomainen. Seuraavat heuristiikat saattavat tehdä siitä selvemmän. Oletetaan (yksinkertaisuuden vuoksi), että $z = 0$, ja olemassa on logaritmin haara "g" (toisin sanoen: primitiivi funktiolle $\zeta \mapsto 1/\zeta$) jossakin avoimessa joukossa U, joka sisältää jäljen γ^*. Tässä tapauksessa

$$\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds = \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{d\zeta}{\zeta} \overset{\text{Lause 4.3.4}}{=} g(\gamma(t)) - g(\gamma(a)). \tag{5.2.5}$$

Seurauksena "φ"-kuvaus, joka esiintyy todistuksessa, saa yksinkertaisen muodon

$$\varphi(t) = e^{g(\gamma(t)) - g(\gamma(a))} = \frac{e^{g(\gamma(t))}}{e^{g(\gamma(a))}} = \frac{\gamma(t)}{\gamma(a)}.$$

Erityisesti, koska γ on suljettu polku, pätee $\varphi(b) = 1$, kuten halutaan.

Oletus $z = 0$ on viaton, mutta primitiivin g:n olemassaolo ei ole: itse asiassa g:n olemassaolo johtaisi siihen, että $\int_\gamma d\zeta/\zeta = 0$ (kaavalla (5.2.5)), mikä ei yleisesti pidä paikkaansa. Lauseen todistuksen pointti on se, että vaikka g ei välttämättä ole olemassa, kuvaus φ käyttäytyy silti samalla tavalla kuin "huijaus"-todistuksessa yllä.

Millaisia ovat jatkuvat $\mathbb{Z}$-arvoiset funktiot oikeastaan?

Propositio 5.2.7. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja yhtenäinen, ja olkoon $g\colon U \to \mathbb{R}$ jatkuva siten, että $g(U) \subset \mathbb{Z}$. Silloin g on vakio.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Korollaari 5.2.8. *Olkoon $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ suljettu paloittain C^1-polku, ja olkoon $U \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ avoin ja yhtenäinen. Silloin n_γ on vakio joukossa U. Jos U on rajoittamaton, tämä vakio on 0.*

Todistus. Lauseen 5.2.4 perusteella kuvaus $z \mapsto g(z) = n_\gamma(z)$ on jatkuva ja $\mathbb{Z}$-arvoinen joukossa U, joten vakioisuus joukossa U seuraa välittömästi edellisestä lauseesta.

Oletetaan sitten, että U on rajoittamaton, ja olkoon $(z_k) \subset U$ jono, jolle $|z_k| \to \infty$ kun $k \to \infty$. Olkoon $m \in \mathbb{Z}$ arvo, jolle $n_\zeta = m$ joukossa U. Tällöin

$$m = \lim_{k \to \infty} n_\gamma(z_k) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_k} = 0,$$

koska funktiot $\zeta \mapsto (\zeta - z_k)^{-1}$ suppenevat tasaisesti kohti 0:aa polulla γ^*, kun $z_k \to \infty$. $\square$

Huomautus 5.2.9. Yleisesti ottaen voi olla hankalaa selvittää arvoa funktiolle $z \mapsto n_\gamma(z)$ annetussa (rajoitetussa, avoimessa, yhtenäisessä) joukossa $U \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Työkaluja tämän ongelman ratkaisemiseksi esitellään kurssilla *Kompleksianalyysi 2*.

Esimerkki 5.2.10 (Ympyräpolkujen kierrosluvut). Muistetaan kaavasta (5.2.1), että

$$n_{\gamma_k}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} = k,$$

missä $z_0 \in \mathbb{C}$, ja $\gamma_k(t) = z_0 + re^{ikt}$. Tästä tosiasiasta ja Korollaarin 5.2.8 avulla voimme päätellä, että

$$n_{\gamma_k}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - w} = k, \qquad w \in D(z_0, r),$$

koska $D(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$ on yhtenäinen. Näin ollen olemme todistaneet sen "intuitiivisesti selvän" tosiasian, että polku γ_k kiertyy yhtä monta kertaa pisteen z_0 ympäri riippumatta pisteestä $w \in D(z_0, r)$.

Pisteille $w \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0, r)$ pätee $n_{\gamma_k}(w) = 0$ Korollaarin 5.2.8 perusteella, koska $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0, r)$ on rajoittamaton ja yhtenäinen joukko, joka sisältyy joukkoon $\mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$. Toistamme ja kirjaamme nämä tärkeät päätelmät:

$$\eta_{\gamma_k}(w) = \begin{cases} k, & w \in D(z_0, r), \\ 0, & w \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0, r). \end{cases} \tag{5.2.6}$$

Tämän kurssin tekniikoilla emme pysty laskemaan helposti yleisen suljetun polun γ kierroslukua. Kuitenkin seuraava yksinkertainen väittämä on yllättävän hyödyllinen:

Propositio 5.2.11. *Olkoot $\gamma, \eta \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ suljettuja paloittain C^1-polkuja siten, että $\gamma(0) = \eta(0)$. Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma^* \cup \eta^*]$, ja oletetaan, että z kuuluu rajoittamattomaan yhtenäiseen avoimeen joukkoon $U \subset \mathbb{C} \setminus \eta^*$. Tällöin*

$$n_{\gamma\star\eta}(z) = n_\gamma(z).$$

Todistus. Meillä on $n_{\gamma\star\eta}(z) = n_\gamma(z) + n_\eta(z)$ Proposition 5.2.3 perusteella, ja lisäksi $n_\eta(z) = 0$ Korollaarin 5.2.8 perusteella. $\square$

Väittämää voidaan esimerkiksi soveltaa seuraavasti:

Esimerkki 5.2.12. Olkoon $\gamma := [-1, 1]\star\sigma^+$ "yläpuolinen puoliympyrä", jossa $\sigma^+(t) = e^{it}$ välillä $t \in [0, \pi]$. On intuitiivisesti selvää, että γ kiertyy tasan kerran pisteen $z = i/2$ ympäri, joten $n_\gamma(i/2) = 1$. Voimme päätellä tämän Proposition 5.2.11 avulla seuraavasti.

Olkoon $\eta := \sigma^- \star \overleftarrow{[-1,1]}$ “alapuolinen puoliympyrä”, jossa $\sigma^-(t) = e^{it}$ välillä $t \in [\pi, 2\pi]$. Silloin $\gamma \star \eta$ on standardi ympyräpolku $\partial D(0,1)$ (tarkemmin: parametrisaation uudelleenmäärittely $\partial D(0,1)$). Näin ollen,

$$n_{\gamma\star\eta}(i/2) = 1.$$

Toisaalta, $i/2$ kuuluu selkeästi johonkin rajoittamattomaan yhtenäiseen joukkoon $U \subset \mathbb{C} \setminus \eta^*$, esimerkiksi $U := \{\mathrm{Im}\,(z) > 0\}$. Näin ollen Proposition 5.2.11 perusteella $n_\gamma(i/2) = n_{\gamma\star\eta}(i/2) = 1$.

Tällöin saavutamme tämän osion keskeisen tuloksen:

Lause 5.2.13 (Cauchyn integraalilause konveksissa joukossa). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ konveksi avoin joukko, olkoon $\gamma\colon [a,b] \to U$ suljettu paloittain C^1-polku, ja olkoon $f\colon U \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Tällöin,*

$$f(z)\cdot n_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in U \setminus \gamma^*.$$

Todistus. Kiinnitetään $z \in U \setminus \gamma^*$, ja tarkastellaan funktiota $g\colon U \to \mathbb{C}$, joka on määritelty seuraavasti:

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in U \setminus \{z\}, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

On selvää, että g on analyyttinen joukossa $U \setminus \{z\}$, ja myös jatkuva joukossa U, koska f on derivoituva pisteessä z. Näin ollen g täyttää oletukset Cauchyn lauseelle konveksissa joukoissa (Lause 5.1.4). Tästä päätellään, että

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{5.2.7}$$

Nyt riittää huomata, että

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z)\cdot n_\gamma(z). \tag{5.2.8}$$

Tämä päättää todistuksen. On syytä huomauttaa, että oletusta $z \in U \setminus \gamma^*$ ei tarvittu (5.2.7):lle, mutta sitä käytettiin siirryttäessä (5.2.8):een (varmistaaksemme, että integraalit ovat hyvin määriteltyjä). □

Kaavasta (5.2.6) saadaan seuraus:

Korollaari 5.2.14 (Cauchyn integraalilause kiekossa). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin, ja oletetaan, että $\bar{D}(z_0, r) \subset U$. Tällöin*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in D(z_0, r), \tag{5.2.9}$$

missä ∂D on lyhenne polulle $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Todistus. On helppo tarkistaa, että on olemassa konveksi avoin joukko $V \subset \mathbb{C}$, jolle pätee $\bar{D}(z_0, r) \subset V \subset U$ (esim. $V = D(z_0, r + \epsilon)$). Siksi (5.2.9) on välitön seuraus Lauseesta 5.2.13 sovellettuna joukkoon V – muistaen myös (5.2.6):sta, että $n_{\partial D}(z) = 1$ kaikilla $z \in D(z_0, r)$. □

5.2.1. Integraalien laskeminen Cauchyn kaavalla. Cauchyn kaava tarjoaa tehokkaan menetelmän monimutkaisten integraalien laskemiseen – jopa sellaisten, jotka eivät ensi silmäyksellä näytä liittyvän kompleksilukuihin. Tätä menetelmää käsitellään järjestelmällisemmin *residylaskennassa*, ks. *Kompleksianalyysi 2*, mutta annamme kaksi havainnollistavaa esimerkkiä.

Esimerkki 5.2.15. Lasketaan integraali

$$\int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z^2 - 1}\, dz. \tag{5.2.10}$$

Tämä integraali ei ole suoraan tunnistettavissa Cauchyn integraalikaavan muotoiseksi, mutta se voidaan helposti muuttaa tällaiseksi. Havaitsemme aluksi, että $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$. Tämän huomion jälkeen on tunnettua, että löytyy aina hajotelma

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 1} \tag{5.2.11}$$

sopivilla kertoimilla $A, B \in \mathbb{C}$. Näiden kertoimien löytämiseksi kirjoitetaan

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} = \frac{(z+1)A + (z-1)B}{(z-1)(z+1)} = \frac{(z+1)A + (z-1)B}{z^2 - 1}.$$

Tämän jälkeen on ilmeistä, että (5.2.11) pätee, jos ja vain jos

$$(A - B) + z(A + B) = (z + 1)A + (z - 1)B = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A - B = 1, \\ A + B = 0. \end{cases}$$

Näin ollen (5.2.11) pätee kun $A = \frac{1}{2}$ ja $B = -\frac{1}{2}$. Tämän jälkeen voimme hajottaa integraalin (5.2.10) muotoon

$$\int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z^2 - 1}\, dz = \tfrac{1}{2} \int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z - 1}\, dz - \tfrac{1}{2} \int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z + 1}\, dz. \tag{5.2.12}$$

Koska

$$n_{\partial D(0,2)}(1) = n_{\partial D(0,2)}(-1),$$

seuraa Cauchyn integraalikaavasta (Lause 5.2.13), että

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z - 1}\, dz = e^1 = e \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z - 1}\, dz = e^{-1}.$$

Vertaamalla tätä (5.2.12) kanssa, saamme ratkaisun:

$$\int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z^2 - 1}\, dz = \pi i(e - e^{-1}).$$

Seuraavassa esimerkissä lasketaan määrätty integraali joukon $\mathbb{R}$ yli:

Esimerkki 5.2.16. Lasketaan integraali

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+1} := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{dt}{t^2+1}. \tag{5.2.13}$$

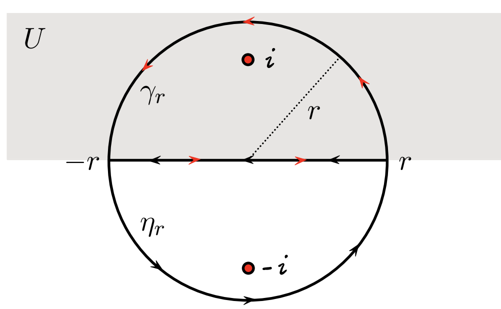
Oikea vastaus π voidaan saada myös "reaalimuuttujan"menetelmillä, mutta nyt näemme, kuinka voi käyttää Cauchyn integraalikaavaa. Huomataan, että $g(z) := (z^2+1)^{-1}$ määrittelee analyyttisen funktion $g\colon \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}$. Lisäksi tämä funktio voidaan hajottaa muotoon

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-i}, \qquad f(z) = \frac{1}{z+i},$$

ja $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Olkoon $U := \{\operatorname{Im} z > -1\}$. Tällöin U on konveksi avoin joukko, joka sisältää $\mathbb{R}$:n ja pisteen i, ja f on analyyttinen U:ssa. Nyt jos $\gamma\colon [a,b] \to U$ on suljettu paloittain C^1-polku, voimme päätellä Cauchyn lauseen perusteella, että

$$\frac{n_\gamma(i)}{2i} = f(i)\cdot n_\gamma(i) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-i}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}. \tag{5.2.14}$$

Tämä näyttää varsin lupaavalta ottaen huomioon kaavan (5.2.13). Laskeaksemme integraalin tarkan arvon meidän on valittava γ sopivasti.



Kuva 3. Polkujen γ_r (punaiset nuolet) ja η_r (mustat nuolet).

Koska tavoitteenamme on (5.2.13), polun $\gamma = \gamma_r$ tulisi ainakin parametrisoida väli $[-r, r]$. Kuitenkin, koska γ_r:n on oltava suljettu polku, meidän on löydettävä jokin tapa "sulkea"väli $[-r, r]$. Kaava (5.2.14) viittaa siihen, että saattaisimme haluta valita γ_r:n siten, että $n_{\gamma_r}(i) = 1$ (vaikka voidaan kokeilla myös muita vaihtoehtoja). Eräs sopiva valinta on polku

$$\gamma_r := [-r, r] \star \sigma_r,$$

missä σ_r parametrisoi suuren puoliympyrän $S(0,r) \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$, joka yhdistää r:n $-r$:ään ylemmässä puolitasossa, ks. Kuva 3. Tarkemmin sanottuna, $\sigma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0,\pi]$. On selvää, että $\gamma^* \subset U$, joten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-r}^{r} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r} \frac{dz}{z^2+1} \overset{(5.2.14)}{=} \frac{n_\gamma(i)}{2i} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_r} \frac{dz}{z^2+1}.$$

On intuitiivisesti selvää, että $n_{\gamma_r}(i) = 1$ kun $r > 1$, ja tämä voidaan perustella tarkasti kuten Esimerkissä 5.2.12, käyttäen Lausetta 5.2.11.

Nyt väitämme, että

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\sigma_r} \frac{dz}{z^2+1} = 0. \tag{5.2.15}$$

Kun tämä on todistettu, huomaamme, että

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{r\to\infty} 2\pi i \cdot \frac{n_{\gamma_r}(i)}{2i} = \pi. \tag{5.2.16}$$

Yhtälö (5.2.15) saadaan suoralla laskulla, käyttäen polkuintegraalien ja kaarenpituusintegraalien vertailua Lauseessa 4.2.10:

$$\left|\int_{\sigma_r} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \int_0^\pi \frac{|\sigma_r'(t)|}{|\sigma_r(t)^2+1|}\,dt = \int_0^\pi \frac{r\,dt}{|\sigma_r(t)^2+1|}\,dt.$$

Huomataan nyt, että $\sigma_r(t)$ liikkuu ympyrällä $S(0,r)$, joten $|\sigma_r(t)^2+1| \geq |\sigma_r(t)|^2 - 1 \geq r^2/2$ jokaisella riittävän suurella $r > 1$. Siksi

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{\sigma_r} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \lim_{r\to\infty} \int_0^\pi \frac{2\,dt}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{2\pi}{r} = 0.$$

Tämä päättää yhtälön (5.2.16) todistuksen.

5.3. Sovellukset

5.3.1. Analyyttisten funktioiden derivaatat. Ensimmäinen sovelluksemme Lauseelle 5.2.13 näyttää, että jos f on analyyttinen avoimessa joukossa U, niin f on äärettömän monta kertaa derivoituva joukossa U.

LAUSE 5.3.1. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f\colon U \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Silloin myös $f'\colon U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Seurauksena kompleksinen n:s derivaatta $f^{(n)}$ on olemassa ja on analyyttinen kaikilla $n \geq 0$.*

TODISTUS. Väitämme ensin seuraavaa. Olkoon $z \in U$, ja olkoon $r > 0$ niin pieni, että $\bar{D}(z,r) \subset U$. Silloin,

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2}\,d\zeta, \qquad w \in D(z,r). \tag{5.3.1}$$

Tässä $\partial D(z,r)$ viittaa ympyräpolkuun $\gamma(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Aloitamme soveltamalla Cauchyn integraalikaavaa kiekossa, Lause 5.2.14, jotta voimme kirjoittaa

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta, \qquad w \in D(z,r).$$

Nyt, moraalisesti, kaava (5.3.1) seuraa ottamalla ∂_w-derivaatat ylläolevan yhtälön molemmista puolista:

$$f'(w) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \partial_w \left(\frac{1}{\zeta - w} \right) f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2}\, d\zeta.$$

Ensimmäiseen yhtälöön laitettiin kysymysmerkki, koska on varmistettava, että “derivoiminen integraalimerkin alla”on sallittua: on osoitettava, että funktio $F\colon D(z,r) \to \mathbb{C}$, joka on määritelty

$$F(w) := \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta, \qquad w \in D(z,r),$$

on analyyttinen, ja sen ∂_w-derivaatta on annettu kaavalla

$$F'(w) = \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2}\, d\zeta. \tag{5.3.2}$$

Osoitamme tämän käyttämällä kompleksisen differentioituvuuden määritelmää. Merkitään $\partial D(z,r) =: \partial D$, kiinnitetään $w \in D$, ja aloitetaan kirjoittamalla

$$\frac{F(v) - F(w)}{v - w} = \frac{1}{v - w} \int_{\partial D} \left[\frac{1}{\zeta - v} - \frac{1}{\zeta - w} \right] f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - v)(\zeta - w)},$$

kaikille $v \in D(z,r)$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \frac{F(v) - F(w)}{v - w} - \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2}\, d\zeta &= \int_{\partial D} \left[\frac{1}{(\zeta - v)(\zeta - w)} - \frac{1}{(\zeta - w)^2} \right] f(\zeta)\, d\zeta \\ &= (v - w) \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - v)(\zeta - w)^2}. \end{aligned}$$

Lopuksi muistetaan, että $w \in D(z,r)$, joten erityisesti $\epsilon := \operatorname{dist}(w, \partial D) > 0$. Nyt $v \in D(w, \frac{\epsilon}{2})$, ja pätee $|\zeta - v| \geq \epsilon/2$ kaikille $\zeta \in \partial D$. Siitä seuraa, että

$$\left| \frac{F(v) - F(w)}{v - w} - \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2}\, d\zeta \right| \leq |v - w| \int_{\partial D} \frac{\|f\|_{L^\infty(D)}\, |d\zeta|}{|\zeta - v||\zeta - w|^2} \leq C_{D,f,\epsilon} |v - w|.$$

Tässä $C_{D,f,\epsilon} > 0$ on vakio, joka riippuu vain joukosta D, funktiosta f, ja ϵ:ista. Vakio valitaan eksplisiittisesti niin, että pätee $C_{D,f,r} = 2\epsilon^{-3} \|f\|_{L^\infty(D)} \text{pituus}(\partial D)$. Antamalla $v \to z$ saadaan kaava (5.3.2) kohdassa $w = z$.

Tämä ei ole aivan tarinan loppu: olemme nyt todistaneet kaavan (5.3.2) f':lle, mutta tämä ei heti sano, että f' on analyyttinen. Kuitenkin, nyt voidaan osoittaa, että

$$G(w) := \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2}\, d\zeta$$

määrittelee analyyttisen funktion $D(z,r)$:ssä, ja

$$f''(w) = \frac{1}{2\pi i} G'(w) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^3}\, d\zeta. \tag{5.3.3}$$

Näin ollen, f':n analyyttisyys seuraa suoraan G:n eksplisiittisestä derivoinnista. Heuristisesti, kaava (5.3.3) G':lle seuraa (jälleen) derivoinnista integraalimerkin alla, ja huolellinen perustelu vaatii laskuja, jotka ovat hyvin samankaltaisia kuin mitä olemme juuri nähneet. Jätämme yksityiskohdat vapaaehtoiseksi tehtäväksi. □

Kaava (5.3.1) on "Cauchyn integraalikaava f':lle kiekossa". Seuraavaksi kirjaamme yleisemmän version tästä kaavasta suljetuille paloittain C^1-poluille ja myös korkeammille derivaatoille. Tämä yleistys on erittäin hyödyllinen (ks. kuvio alussa luvussa 5.1).

Lause 5.3.2 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ konveksi avoin joukko, ja olkoon $f\colon U \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to U$ suljettu paloittain C^1-reitti. Silloin*

$$f^{(n)}(z) \cdot n_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad z \in U \setminus \gamma^*,\ n \geq 0. \tag{5.3.4}$$

Todistus. Tämä lause voidaan todistaa "raa'alla voimalla"käyttäen Cauchyn integraalikaavaa ja derivoimalla n kertaa integraalimerkin alla. Todistus voitaisiin tiivistää seuraavasti:

$$f^{(n)}(z) \cdot n_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \partial_w^{(n)} \left(\frac{1}{\zeta - w} \right) \Big|_{w=z} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}}\, d\zeta,$$

koska $\partial_w^{(n)} (\zeta - w)^{-1} = n!(\zeta - w)^{-n-1}$. Tämän lähestymistavan suurin haaste olisi oikeuttaa derivoiminen integraalimerkin alla. Tämä olisi hieman työlästä, mutta onneksi on olemassa elegantimpi tapa.

Osoitamme väitteen induktion avulla n:n suhteen, kun tapaus $n = 0$ on Cauchyn integraalikaava, Lauseen 5.2.13 mukaan. Oletetaan siis, että kaava (5.3.4) on todistettu kaikille analyyttisille funktioille U:ssa, jollekin kiinteälle $n \geq 0$ ja kaikille $z \in U \setminus \gamma^*$. Lauseen 5.3.1 mukaan derivaatta $f'\colon U \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, joten erityisesti induktioväitteemme pätee f':lle:

$$f^{(n+1)}(z) \cdot n_\gamma(z) = (f')^{(n)}(z) \cdot n_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad z \in U \setminus \gamma^*.$$

Vasen puoli näyttää hyvältä, mutta oikea puoli vaatii vielä käsittelyä. Väitämme, että

$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = (n+1) \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}\, d\zeta, \qquad z \in U \setminus \gamma^*. \tag{5.3.5}$$

Tämän osoittamiseksi, kiinnitä $z \in U \setminus \gamma^*$, ja määrittele funktio $g\colon U \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$ kaavalla

$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}, \qquad \zeta \in U \setminus \{z\}.$$

Nyt g on selvästi analyyttinen joukossa $U \setminus \{z\}$, ja

$$g'(\zeta) = \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{(n+1)f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}, \qquad \zeta \in U \setminus \{z\}.$$

Nyt g' on jatkuva joukossa $U \setminus \{z\}$ ja sillä on primitiivi joukossa $U \setminus \{z\}$ (nimittäin g), joten Lauseen 4.3.4 mukaan pätee

$$0 = \int_\gamma g'(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta - (n+1)\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}\, d\zeta.$$

Tämä vastaa yhtälöä (5.3.5), joten todistus on valmis. □

5.3.2. Cauchyn estimaatit ja Liouvillen lause. Huomaa, että kaavan (5.3.4) avulla voit (periaatteessa) laskea $f^{(n)}$:n integroimalla f:ää. Nähtyäsi tämän, tuskin on yllättävää, että myös $f^{(n)}$:n itseisarvoa voidaan arvioida f:n itseisarvon avulla:

KOROLLAARI 5.3.3 (Cauchyn estimaatit). *Olkoon $D = D(z,r) \subset \mathbb{C}$ kiekko, ja olkoon $f\colon D \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Tällöin*

$$|f^{(n)}(w)| \le \frac{n! \cdot r \cdot \|f\|_{L^\infty(D)}}{(r - |w - z|)^{n+1}}, \qquad w \in D,\ n \ge 0. \tag{5.3.6}$$

Erityisesti $|f^{(n)}(z)| \le n!\|f\|_{L^\infty(D)}/r^n$.

TODISTUS. Olkoon $0 < s < r$, ja olkoon ∂D_s tavallinen ympyräpolku, joka parametrisoi D_s:n reunan. Silloin f on analyyttinen konveksissa avoimessa joukossa $D = D(z,r)$, joka sisältää ∂D_s:n jäljen, joten voimme päätellä (5.3.4):n perusteella, että

$$|f^{(n)}(w)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\partial D_s} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - w)^{n+1}}\right| \le \frac{n! \cdot \|f\|_{L^\infty(D)}}{2\pi}\int_{\partial D_s} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - w|^{n+1}}.$$

Huomaa nyt, että $|\zeta - w| \ge |\zeta - z| - |w - z| = s - |w - z|$ kaikille $\zeta \in \partial D_s$, joten

$$|f^{(n)}(w)| \le \frac{n! \cdot \|f\|_{L^\infty(D)} \cdot \ell(\partial D_s)}{2\pi(s - |w - z|)^{n+1}}.$$

Koska $\text{length}(\partial D_s) = 2\pi s$, arvio (5.3.6) seuraa. Vakiotermi (ja erityisesti w:n riippumattomuus) menee ulos $(n+1)$:llä kertomalla molemmilla puolilla. Viimeinen väite seuraa. □

Seurauksena saadaan tärkeä Liouvillen lause.

KOROLLAARI 5.3.4 (Liouvillen lause). *Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen ja rajoitettu. Tällöin f on vakiokuvaus.*

TODISTUS. Kiinnitetään $z \in \mathbb{C}$, ja käytetään Cauchyn estimaatteja kiekossa $D(z,r) \subset \mathbb{C}$:

$$|f'(z)| \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{C})}}{r}, \qquad r > 0.$$

Kun $r \to \infty$ saadaan $f'(z) = 0$, joten $f' \equiv 0$. Koska $\mathbb{C}$ on yhtenäinen, f on vakio Korollaarin 3.3.1 nojalla. □

HUOMAUTUS 5.3.5. Liouvillen lause on syvällinen ja yllättävä, mutta vielä vahvempi tulos on totta: jos $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, niin joko f on vakio tai sitten f saa kaikki arvot $\mathbb{C}$:ssä, paitsi ehkä yhden. Tätä tulosta kutsutaan *(pieneksi) Picardin lauseeksi*. Esimerkki $f(z) = e^z$ näyttää, että Picardin lause on tarkka, sillä $e^z \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

5.3.3. Algebran peruslause. Näimme kurssin alussa, että yhtälöllä $z^n - w = 0$ on ratkaisu $z \in \mathbb{C}$ (itse asiassa n ratkaisua) kaikilla $w \in \mathbb{C}$. Sama pätee kaikille polynomiyhtälöille $p(z) = 0$, ja tätä tulosta kutsutaan *algebran peruslauseeksi*. Yllättävästi sen todistus perustuu Liouvillen lauseeseen!

KOROLLAARI 5.3.6 (Algebran peruslause). *Olkoon $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ polynomi, missä $n \geq 1$ ja $a_n \neq 0$ (joten p ei ole vakio). Tällöin on olemassa $z \in \mathbb{C}$ siten, että $p(z) = 0$.*

TODISTUS. Tehdään vastaoletus, että $p(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Tällöin $f(z) := p(z)^{-1}$ määrittelee analyyttisen funktion $\mathbb{C}$:ssä Proposition 3.1.7 mukaan. Väitämme, että f on rajoitettu. Huomataan, että

$$|p(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_0|}{|z|} \right) \to \infty,$$

kun $|z| \to \infty$, käyttäen oletusta $a_n \neq 0$. Erityisesti on olemassa $R > 0$ (riippuen vakioista $a_0, \ldots, a_n$), jolla pätee $|p(z)| \geq 1$ kun $|z| \geq R$. Tällöin

$$|f(z)| \leq 1, \qquad |z| \leq R.$$

Toisaalta, koska f on jatkuva ja $\bar{D}(0,R)$ on kompakti, Korollaari 2.3.9 näyttää, että on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|f(z)| \leq M, \qquad |z| \leq R.$$

Yhdistämällä nämä arviot, näemme, että

$$|f(z)| \leq \max\{M, 1\}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Liouvillen lauseen (Korollaari 5.3.4) perusteella voimme nyt päätellä, että f on vakio. Tämä vakio ei ole nolla, koska $f(z) = p(z)^{-1} \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Näin ollen $f \equiv \alpha \neq 0$. Mutta silloin $p \equiv \alpha^{-1}$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $|p(z)| \to \infty$ kun $|z| \to \infty$. $\square$

Huomautus 5.3.7. Korollaari 5.3.6 näyttää antavan meille vain **yhden** pisteen $z \in \mathbb{C}$ siten, että $p(z) = 0$. Tämä saattaa vaikuttaa pettymykseltä, koska tiesimme jo, että $z^n - w$:llä on n erilaista ratkaisua, jos $w \neq 0$. Itse asiassa Korollaari 5.3.6 antaa samanlaisen päätelmän, kuten selitämme nyt.

Oletetaan, että p on asteen $n \geq 1$ polynomi. Tällöin on olemassa $z_1 \in \mathbb{C}$ siten, että $p(z_1) = 0$. Nyt eräästä abstraktin algebran perusominaisuudesta seuraa että voimme faktorisoida $p(z) = p_1(z)(z - z_1)$, missä p_1 on asteen $n-1$ polynomi. Jos $n - 1 \geq 1$, voimme soveltaa Korollaaria 5.3.6 uudelleen p_1:lle. Sitten $p(z) = (z_1 - z)(z_2 - z)p_2(z)$, missä p_2 on asteen $n-2$ polynomi.

Voimme toistaa saman argumentin täsmälleen n kertaa. Näin löydämme lopulta faktorisoinnin $p(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n)$, missä $p(z_j) = 0$ kaikilla $1 \leq j \leq n$, ja $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Näin ollen Korollaari 5.3.6 sallii meidän löytää ei vain yhtä nollakohtaa p:lle, vaan täsmälleen n nollakohtaa.

Kuitenkin on täysin mahdollista, että $z_i = z_j$ joillekin $i \neq j$, tai ehkä jopa $z_i = z_j$ kaikille $1 \leq i, j \leq n$. Tässä tapauksessa $p(z) = c(z - z_1)^n$, ja sanomme, että p-lla on *nollakohta asteella n pisteessä* z_1. Yleisesti asteen n polynomilla p voi olla mikä tahansa määrä $k \in \{1, \ldots, n\}$ **erilaisia** nollakohtia $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, mutta niiden asteiden summa on aina n.

5.3.4. Moreran lause ja analyyttinen jatkuvuus pisteeseen. Ennen seuraavan korollaarin lukemista on suositeltavaa kerrata Korollaari 5.1.6.

Korollaari 5.3.8 (Moreran lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f\colon U \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka toteuttaa*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0 \tag{5.3.7}$$

kaikille kolmioille $\triangle \subset U$. Silloin f on analyyttinen U:ssa.

Todistus. Korollaarin 5.1.6 perusteella funktiolla f on primitiivi jokaisessa avoimessa kiekossa $D \subset U$. Toisin sanoen jokaiselle $D \subset U$ on olemassa analyyttinen funktio $F\colon D \to \mathbb{C}$, jolla pätee $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in D$. Nyt seuraa, että $F' = f$ on analyyttinen D:ssä, kun käytetään Lausetta 5.3.1 sovellettuna F:ään. Koska $D \subset U$ oli mielivaltainen, seuraa että f on analyyttinen U:ssa. $\square$

Moreran lauseella on edelleen tärkeä seuraus:

Korollaari 5.3.9 (Analyyttinen jatkuvuus pisteeseen). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $w_0 \in U$. Oletetaan, että $f\colon U \to \mathbb{C}$ on jatkuva ja analyyttinen $U \setminus \{z_0\}$:ssa. Silloin f on analyyttinen U:ssa.*

TODISTUS. Seuraa, että (5.3.7) pätee kaikille kolmioille $\triangle \subset U$ Cauchyn lauseen perusteella (tämä salli yhden "erikoispisteen", muista Lause 5.1.1). Päätelmä seuraa välittömästi Moreran lauseesta, Korollaari 5.3.8. □

HUOMAUTUS 5.3.10. Korollaari 5.3.9 on yllättävä, sillä vastaava tulos epäonnistuu pahasti $\mathbb{R}$:ssä. Esimerkiksi funktio $f(t) := |t|$ on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä ja äärettömän monta kertaa derivoituva $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$:ssä, mutta ei derivoituva $t = 0$:ssa.

5.3.5. Keskiarvo- ja maksimimoduuliperiaatteet. Aloitetaan Cauchyn integraalikaavan seurauksesta, joka on itsessään kiinnostava. Siinä todetaan, että jos f on analyyttinen, niin $f(z)$ on keskiarvo arvoista $f(z + re^{it})$ kaikille $t \in [0, 2\pi)$:

KOROLLAARI 5.3.11 (Keskiarvoperiaate). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f: U \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Jos $\bar{D}(z, r) \subset U$, niin*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt.$$

TODISTUS. Tämä seuraa suoraan Cauchyn integraalikaavasta kiekossa (Korollaari 5.2.14), ja muistamalla että $\partial D(z, r)$ viittaa ympyräpolkuun $\gamma(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t)) ire^{it}}{re^{it}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, dt.$$

Tämä päättää todistuksen. □

Siirrymme sitten osion päätulokseen. *Maksimimoduuliperiaatteella* on ainakin kaksi erilaista ja hyödyllistä muotoilua, ja esitämme ne molemmat.

LAUSE 5.3.12 (Maksimimoduuliperiaate I). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja yhtenäinen, ja olkoon $f: U \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Jos $|f|$ saavuttaa maksiminsa U:ssa, niin f on vakio. Tarkemmin sanottuna, jos on olemassa $z_0 \in U$ siten, että $|f(z)| \le |f(z_0)|$ kaikilla $z \in U$, niin f on vakio.*

HUOMAUTUS 5.3.13. Sanaa "maksimi" ei voi vaihtaa "minimiin" Lauseessa 5.3.12. Esim., $z \mapsto z$ on analyyttinen $D(0, 1)$:ssä ja $|z|$ saavuttaa miniminsä pisteessä 0. Kuitenkin jos $|f|$ saavuttaa minimin $|f(z_0)| > 0$ U:ssa, niin f on vakio. Tämä seuraa soveltamalla Lausetta 5.3.12 funktioon $1/f$.

LAUSEEN 5.3.12 TODISTUS. Sen osoittamiseksi, että (analyyttinen funktio) f on vakio yhtenäisessä joukossa U, riittää osoittaa, että $|f|$ on vakio joukossa U – tämä huomattiin Korollaarissa 3.3.2. Oletetaan, että piste $z_0 \in U$ on olemassa, kuten lauseen oletuksessa, ja olkoon

$$M := |f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in U\}.$$

Riittää osoittaa, että joukko $V := \{z \in U : |f(z)| = M\}$ on koko U.

Osoitetaan ensin, että V on avoin. Olkoon $z \in V$, ja olkoon $r_0 > 0$ sellainen, että $\bar{D}(z, r_0) \subset U$. Väitämme, että itse asiassa $D(z, r_0) \subset V$. Nähdäksemme tämän, valitsemme mielivaltaisen $r \in (0, r_0)$, ja sovellamme keskiarvoperiaatetta (Lause 5.3.11) seuraavasti:

$$M = |f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})|\, dt. \tag{5.3.8}$$

Tässä $z + re^{it} \in U$ kaikilla $t \in [0, 2\pi]$, joten oletuksen perusteella $|f(z + re^{it})| \leq M$. Koska $t \mapsto |f(z+re^{it})|$ on jatkuva, (5.3.8) pakottaa $|f(z+re^{it})| = M$ kaikilla $t \in [0, 2\pi]$. Toisin sanoen $\partial D(z, r) \subset V$. Mutta koska $r \in (0, r_0)$ oli mielivaltainen, olemme osoittaneet, että $D(z, r_0) \subset V$, joten V on avoin.

Seuraavaksi osoitamme, että $V = U$. Olkoon $z \in U$ mielivaltainen: väitämme, että $z \in V$, eli $|f(z)| = M$. Olkoon $\gamma\colon [0, 1] \to U$ polku, jolla $\gamma(0) = z_0$ ja $\gamma(1) = z$. Huomaa, että $|f(\gamma(0))| = M$. Olkoon

$$t_0 := \sup\{t \in [0, 1] : |f(\gamma(t))| = M\}.$$

Funktion $|f| \circ \gamma$ jatkuvuus implikoi $|f(\gamma(t_0))| = M$. Väitämme, että $t_0 = 1$: silloin $|f(z)| = |f(\gamma(1))| = M$, kuten haluttiin. Jos tämä ei olisi voimassa, ja $t_0 < 1$, niin avoimuuden ja γ:n jatkuvuuden perusteella voisimme löytää välin $I := (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, jolla $\gamma(t) \in V$ kaikille $t \in I$. Toisin sanoen $|f(\gamma(t))| = M$ kaikille $t \in I$, mikä olisi ristiriidassa t_0:n määritelmän kanssa. Siis $t_0 = 1$, ja $V = U$. □

Korollaari 5.3.14 (Maksimimoduuliperiaate II). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin, yhtenäinen, ja <u>rajoitettu</u>. Jos $f\colon \bar{U} \to \mathbb{C}$ on jatkuva ja analyyttinen joukossa U, niin*

$$\max_{z \in \bar{U}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|. \tag{5.3.9}$$

Tässä ∂U viittaa joukon U reunaan.

Todistus. Koska U on rajoitettu ja $|f|\colon \bar{U} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, on olemassa $z_0 \in \bar{U}$ siten, että $|f|$ saavuttaa maksimiarvonsa kohdassa z_0:

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \bar{U}} |f(z)|.$$

Tämä seuraa Korollaarista 2.3.10. Jos $z_0 \in \partial U$, olemme valmiit. Muuten $z_0 \in U$. Silloin Lauseen 5.3.12 oletukset toteutuvat, joten f on vakio joukossa U. Jatkuvuuden vuoksi f on myös sama vakio joukossa $\bar{U}$, joten (5.3.9) pätee myös tässä tilanteessa. □

VAROITUS 5.3.15. Oletus, että joukko U on rajoitettu, on tarpeellinen. Esimerkiksi ajatellaan avointa ja yhtenäistä (mutta rajoittamatonta) joukkoa $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Nyt analyyttinen funktio $z \mapsto e^z$ toteuttaa

$$|e^z| = 1, \qquad z \in \partial U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\},$$

mutta $z \mapsto |e^z|$ on rajoittamaton joukossa U. On kuitenkin olemassa Korollaarin 5.3.14 vastineita rajoittamattomille alueille, joissa tehdään sopivia oletuksia funktiolle f. Tällaiset tulokset tunnetaan usein nimellä *Phragmen-Lindelöfin periaate*.

Lopuksi kirjaamme seuraavan korollaarin maksimimoduuliperiaatteelle:

KOROLLAARI 5.3.16 (Schwarzin lemma). *Oletetaan, että $f\colon \mathbb{D} := D(0,1) \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, $f(0) = 0$, ja $|f(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$. Tällöin*

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \textit{ja} \quad |f(z)| \leq |z| \textit{ kaikilla } z \in \mathbb{D}.$$

Lisäksi, jos on olemassa $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ siten, että $|f(z_0)| = |z_0|$, niin on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että $|\lambda| = 1$, ja $f(z) = \lambda z$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$.

TODISTUS. Harjoitustehtävä. (*Vihje:* Sovella maksimimoduuliperiaatetta funktioon $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, joka on määritelty seuraavasti:

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Aloita selittämällä, miksi g on analyyttinen joukossa $\mathbb{D}$.) $\square$

Kirjallisuutta

[FB09] Eberhard Freitag, Rolf Busam: Complex analysis, 2nd edition, Universitext, Springer, 2009.

[Ki15] Tero Kilpeläinen: Kompleksianalyysi 1. Lecture notes (in Finnish), 2015.

[Or23] Tuomas Orponen: Complex analysis 1. Lecture notes, 2023.

[Pa90] Bruce P. Palka: An introduction to complex function theory, Springer, 1990.

[SS03] Elias M. Stein, Rami Shakarchi: Complex analysis, Princeton University Press, 2003.