Sarjat ja approksimointi
Tentti, 26.10.2016.

Muista perustella vastauksesi huolellisesti!

1. (a) Olkoon $f\colon]-1,1[\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\,.$$
Muodosta funktion f toinen Taylorin polynomi $T_{2,0}f(x)$ pisteessä $x_0=0$.
(b) Olkoot $g,h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituvia funktioita, joille pätee
$$g(0)=h(0)=0 \quad \text{ja} \quad h'(0)\neq 0.$$
Osoita Taylorin polynomien avulla, että
$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{g'(0)}{h'(0)}\,.$$

2. (a) Suppenevatko seuraavat kaksi sarjaa? Suppenevatko ne itseisesti?
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^3}{3^k} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k\,(k+1)}$$
(b) Määritä potenssisarjan
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{x}{3}\right)^k$$
suppenemissäde.

3. Olkoon $\alpha\geq 0$. Olkoon $f_k\colon[0,1]\to\mathbb{R}$,
$$f_k(x)=\begin{cases} xk^\alpha, \text{ kun } 0\leq x\leq \frac{1}{k}\\ \left(\frac{2}{k}-x\right)k^\alpha, \text{ kun } \frac{1}{k}<x<\frac{2}{k}\\ 0, \text{ kun } \frac{2}{k}\leq x\leq 1\,.\end{cases}$$
(a) Osoita, että funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee pisteittäin.
(b) Millä parametrin α arvoilla funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti?

4. Olkoon $f_j\colon[0,1]\to\mathbb{R}$,
$$f_j(x)=x^j(1-x).$$
(a) Minkä funktion funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty}f_j$ määrää?

(b) Suppeneeko funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty}f_j$ tasaisesti?

5. Olkoon $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ vähenevä jono, jolle $\lim_{j\to\infty}a_j=0$ ja lukusarja $\sum_{j=0}^{\infty}a_j$ hajaantuu. Missä joukossa potenssisarja
$$\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j$$
suppenee?