SARJAT JA APPROKSIMOINTI, TENTTI

1\. a) $f: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad T_{2,0} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

b) Koska funktiot g ja h ova jatkuvasti derivoituvia, voidaan kirjoittaa

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \varepsilon_1(x)$$
$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \varepsilon_2(x)$$

missä $\varepsilon_1(x) = o(|x|)$, $\varepsilon_2 = o(|x|)$, eli $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\varepsilon_1(x)}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\varepsilon_2(x)}{x}$.

Kun $g(0) = h(0) = 0$ ja $h'(0)$, saadaan raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(0)x + \varepsilon_1(x)}{h'(0)x + \varepsilon_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(0) + \varepsilon_1(x)/x}{h'(0) + \varepsilon_2(x)/x} = \frac{g'(0)+0}{h'(0)+0} = \frac{g'(0)}{h'(0)}$$

Sarjat ja approksimointi Tentti 26.10.16

Ratkaisuehdotuksia

2. a) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{k^3}{3^k}}_{=:a_k}$ Käytetään juuritestiä:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|(-1)^k \frac{k^3}{3^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{k^3}}{\sqrt[k]{3^k}} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sqrt[k]{k}^{\,3}}_{\to 1^3,\ \text{kun } k\to\infty} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3} < 1,$$

joten sarja suppenee itseisesti.
Tällöin se myös suppenee.

$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k+2}{k(k+1)}}_{=:a_k}$. Koska nyt $a_k \geq 0$ kaikilla k, voidaan käyttää vertailutestiä.

Huomataan, että

$$\frac{k+2}{k(k+1)} \geq \frac{k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}.$$

Koska $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu, niin vertailutestin nojalla myös $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k(k+1)}$ hajaantuu.

b) $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}\, 3^k}}_{=: a_k} x^k$

Potenssisarjan suppenemissäde R saadaan esimerkiksi laskemalla

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+1}\ 3^{k+1}}{\sqrt{k}\ \cancel{3^k}} = \lim_{k\to\infty} 3 \sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 3 \sqrt{1+\frac{1}{k}} = 3 .$$

4. a) Olkoon $f_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = x^j(1-x)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Merkitään $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$.

Huomataan, että $f_j(1) = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(1) = 0$.

Kun $0 \leq x < 1$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j (x-1) = (x-1) \sum_{j=1}^{\infty} x^j \overset{\text{geom. sarja}}{=} \frac{x-1}{x-1} = 1 .$$

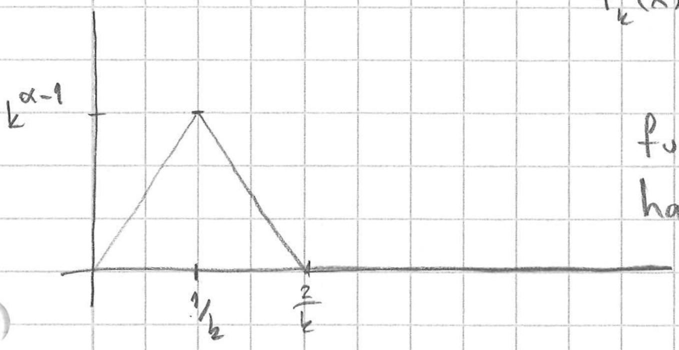
Siis $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{kun } x = 1 \end{cases}$.

b) Nyt funktiot f_j ovat jatkuvia $\forall j$. Jos sarja suppenisi tasaisesti, olisi myös f jatkuva. Koska f on selvästi epäjatkuva, funktiosarja ei suppene tasaisesti.

SARJAT JA APPROKSIMOINTI, TENTTI

3. $\alpha \geq 0$, $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} x k^\alpha, & 0 \leq x \leq 1/k \\ (\frac{2}{k} - x) k^\alpha, & \frac{1}{k} < x < \frac{2}{k} \\ 0, & \frac{2}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$



funktion f_k kuvaaja on hahmoteltu vieressä.

a) Väite: $f_k(x) \xrightarrow{k \to \infty} 0$ kaikilla $x \in [0,1]$

Tod: Olk. $x_0 \in [0,1]$. Jos $x_0 = 0$, niin $f_k(x_0) = 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0$.
Jos $x_0 > 0$, löytyy $N \in \mathbb{N}$ s.e. $x_0 > \frac{2}{N}$. (Esim $N = \lceil \frac{2}{x_0} \rceil$

Tällöin kaikilla $k > N$, $f_k(x_0) = 0$. Siispä
$f_k(x_0) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. □

b) f_k on kasvava välillä $[0, 1/k]$, vähenevä välillä $[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}]$ ja häviää välillä $[\frac{2}{k}, 1]$. Siten se saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä $x = \frac{1}{k}$;

$$\max_{x \in [0,1]} f_k(x) = f_k(\tfrac{1}{k}) = k^{\alpha - 1}$$

Nyt $f_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ tasaisesti jos ja vain jos

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - 0| = \max_{x \in [0,1]} f_k(x) = k^{\alpha-1} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Kun $0 \leq \alpha < 1$ niin $\alpha - 1 < 0$ joten $k^{\alpha-1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$
kun $\alpha = 1$ niin $\alpha - 1 = 0$ joten $k^{\alpha-1} = 1 \quad \forall k$
kun $\alpha > 1$ niin $\alpha - 1 > 0$ joten $k^{\alpha-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

Siis $f_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ tasaisesti jos ja vain jos $\alpha \in [0,1)$.

SARJAT JA APPROKSIMOINTI, TENTTI

5. Olk. a_j vähenevä jono jolle $\lim a_j = 0$ ja
$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

Väite: Silloin potenssisarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ suppenee täsmälleen, kun $x \in [-1, 1)$.

Tod. Oletuksen mukaan potenssisarja hajaantuu, kun $x = 1$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j 1^j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty.$$

Siten se hajaantuu myös aina kun $|x| > 1$.

Jonon (a_j) vähenevyys ja $\lim_{j\to\infty} a_j = 0 \Rightarrow a_j \geq 0 \ \forall j$.

Siten Leibnizin testin oletukset ovat voimassa ja sarja
$\sum_{j=1}^{\infty} a_j (-1)^j$ suppenee.
Erityisesti siis potenssisarja suppenee, kun $x = -1$.
Tästä myös seuraa, että potenssisarja suppenee, kun $|x| < 1$.

Keräämällä tulokset yhteen toteamme, että potenssisarja
$\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ suppenee täsmälleen, kun $x \in [-1, 1)$. $\square$