

Sarjat ja approksimointi

Harjoitus 7, 25.10.2016

1. Missä joukossa seuraavat potenssisarjat suppenevat?

$$(a) \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j x^j \quad (b) \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{j^2} x^j.$$

2. Missä joukossa seuraavat potenssisarjat suppenevat?

$$(a) \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{\log j} \quad (b) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{1 + j^2}$$

3. Missä joukossa seuraavat potenssisarjat suppenevat?

$$(a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \log k} x^k \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{2^k} x^k.$$

4. Missä joukossa seuraavat potenssisarjat suppenevat?

$$(a) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{j^j} x^j \quad (b) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^{2j}$$

5. Olkoot $a_j \in \mathbb{R} - \{0\}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Olkoon R potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ suppenemissäde.

Osoita, että

$$R = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|},$$

jos lukujono $\left(\frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}\right)_{j=0}^{\infty}$ suppenee.

6. Olkoot $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ potenssisarjoja, joiden suppenemissäteet ovat R_1 ja R_2 ,

$R_1 < R_2$. Mikä on potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$ suppenemissäde?

7. Määritä funktion $f(x) = \sin x$ potenssisarja pisteessä $x_0 = 0$. Millä välillä potenssisarja suppenee kohti funktiota $\sin x$?

8. Olkoot $f, g, h:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ funktiot

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x}, \quad h(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Määritä funktion h Taylorin sarja pisteessä $x_0 = 0$

(a) funktioiden f ja g Taylorin sarjojen Cauchyn tulon avulla.

(b) osamurtokehityksen ja funktioiden f ja g Taylorin sarjojen avulla.

⁵Vihje: Suhdetesti.

⁷Vihje: Mikä on sinifunktion Taylorin polynomi? Tutki jäännöstermiä Lagrangen muodon avulla tai käytä Lausetta 5.13