Sarjat ja approksimointi
Harjoitus 6, 18.10.2016

1. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppeneva sarja, joka ei suppene itseisesti. Olkoon p_n sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ n:s positiivinen termi. Olkoon q_n sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ n:s negatiivinen termi. Osoita, että sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ hajaantuvat.

2. Anna esimerkki vuorottelevasta sarjasta $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, jolla on kaikki seuraavat ominaisuudet:
(a) $a_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$,
(b) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ja
(c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ hajaantuu.

---

3. Olkoot $f_j\colon\,]-\infty,-1[\,\to \mathbb{R}$, $g_j\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\text{(a)}\quad f_j(x) = 2^{jx}\,, \qquad\qquad \text{(b)}\quad g_j(x) = \frac{1}{j^3+2x^2}\,.$$

Suppenevatko funktiosarjat $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} g_j$ pisteittäin tai tasaisesti?

4. Olkoot $f_j\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$,

$$f_j(x) = (\sin x)^j(\cos x)^j, \quad j = 1,2,3,\ldots,$$

ja $f_0(x) = 1$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Osoita, että funktiosarja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ suppenee tasaisesti. Minkä funktion funktiosarja määrää?

5. Olkoot $f_k\colon\,]-1,1[\,\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$,

$$f_k(x) = x^2\, e^{-k\,x^2}\,.$$

Suppeneeko funktiosarja $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

6. Olkoot $f_j\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, integroituvia funktioita, joille funktiosarja $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f. Osoita, että f on integroituva välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty}\int_a^b f_j(x)\,dx.$$

7. Olkoot $f_j\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$

$$f_j(x) = \frac{\sin(2jx)}{j^3}.$$

Osoita, että funktiosarja $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ määrää jatkuvan funktion. Laske integraali $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

---

[4] Vihje: $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
[7] Vihje: Tehtävä 6 auttaa.

8. Olkoon $x_2 \in \mathbb{R}$ sellainen piste, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x_2 - x_0)^j$ hajaantuu. Osoita, että potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ hajaantuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joilla $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.