

**Sarjat ja approksimointi**  
**Harjoitus 5, 11.10.2016**

1. Suppenevatko seuraavat sarjat?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \sin(1/k).$$

2. Suppenevatko seuraavat sarjat? Suppenevatko ne itseisesti?

$$(a) \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(\log j)^j}, \quad (b) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j}{j^3}.$$

3. Suppenevatko seuraavat sarjat? Suppenevatko ne itseisesti?

$$(a) \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\log(j+1)}, \quad (b) \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{j^2}{2^j}.$$

4. Tutki integraalitestin avulla, millä parametrin  $\alpha \in \mathbb{R}$  arvoilla sarja

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\alpha}$$

suppenee ja millä parametreilla se hajaantuu.

---

Oletetaan tehtävissä 5 ja 6, että  $a_j \geq 0$  ja  $b_j \geq 0$  kaikilla  $j \in \mathbb{N}$ .

5. Oletetaan, että lukujono  $\frac{a_j}{b_j}$  suppenee ja sarja  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  suppenee. Osoita, että sarja  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  suppenee.

6. Oletetaan, että  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j}{b_j} \in ]0, \infty[ \cup \{\infty\}$  ja sarja  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  hajaantuu. Osoita, että sarja  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  hajaantuu.

---

7. Olkoon  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  kasvava injektio. Olkoon

$$b_k = \begin{cases} a_{\varphi^{-1}(k)} & \text{kaikilla } k \in \varphi(\mathbb{N}), \\ 0 & \text{kaikilla } k \notin \varphi(\mathbb{N}). \end{cases}$$

Osoita, että sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  suppenee, jos ja vain jos sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  suppenee.

8. Olkoon  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  itseisesti suppeneva sarja. Osoita, että sarja  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$  suppenee. Näytä esimerkillä, että väite ei päde ilman oletusta itseisestä suppenemisestä.

---

<sup>5</sup>Vihje: Vertailutesti

<sup>7</sup>Vihje: Sarjassa  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  on samat termit kuin sarjassa  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Ne ovat vieläpä samassa järjestyksessä mutta väleihin on lisätty nollia.